

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

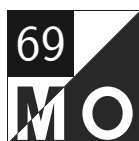
Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA PRE ŽIAKOV ZÁKLADNÝCH ŠKÔL A NIŽŠÍCH ROČNÍKOV VIACROČNÝCH GYMNÁZIÍ

69. ročník, školský rok 2019/2020

Domáce kolo

Kategórie Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 – zadania úloh



Milí žiaci,

máte radi zaujímavé matematické úlohy a chceli by ste súťažiť v ich riešení? Ak áno, zúčastnite sa Matematickej olympiády (MO). Súťaž je dobrovoľná a nesúvisí s klasifikáciou z matematiky. Matematická olympiáda má niekoľko kategórií. V tomto letáku nájdete úlohy, ktoré sú určené žiakom základných škôl (ZŠ), prvých štyroch ročníkov osemročných gymnázií (OG) a príslušných ročníkov gymnázií s iným počtom rokov štúdia.

Kategória **Z5** je určená pre žiakov 5. ročníka ZŠ.

Kategória **Z6** je určená pre žiakov 6. ročníka ZŠ a I. ročníka OG.

Kategória **Z7** je určená pre žiakov 7. ročníka ZŠ a II. ročníka OG.

Kategória **Z8** je určená pre žiakov 8. ročníka ZŠ a III. ročníka OG.

Kategória **Z9** je určená pre žiakov 9. ročníka ZŠ a IV. ročníka OG. Túto kategóriu môžu riešiť aj žiaci prvého („prípravného“) ročníka bilingválnych gymnázií s päťročným štúdiom.

So súhlasom svojho učiteľa matematiky môžete súťažiť aj v niektorej kategórii určenej pre vyšší ročník alebo v kategóriách A, B, C, ktoré sú určené pre žiakov stredných škôl (úlohy sú zverejnené v letáku MO pre stredné školy).

Priebeh súťaže:

Kategórie Z5, Z6, Z7, Z8 pozostávajú z domáceho a okresného kola, kategória Z9 z domáceho, okresného a krajského kola.

V rámci domáceho kola riešite 6 úloh, ktoré sú v tomto letáku. *Riešenia úloh odovzdajte svojim učiteľom matematiky najneskôr v týchto termínoch:*

kategória	jedna trojica úloh	druhá trojica úloh
Z5, Z9	15. november 2019	11. december 2019
Z6, Z7, Z8	11. december 2019	28. február 2020

Vaši učitelia vám riešenia opravujú a ohodnotia podľa stupnice: 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*.

Úspešným riešiteľom domáceho kola sa stáva žiak, ktorý bude mať ohodnotené aspoň štyri úlohy stupňom aspoň *dobře*. Práce všetkých úspešných riešiteľov kategórií Z5 – Z9 zašle vaša škola okresnej komisii MO. Tá z nich vyberie najlepších riešiteľov a pozve ich do okresného kola. V rámci neho riešite úlohy podobného rázu ako v domácom kole, avšak klauzúrne, to znamená, že nemôžete využívať cudziu pomoc a na riešenie máte k dispozícii obmedzený čas (2 hodiny v kategóriách Z5, Z6, Z7, Z8, 4 hodiny v kategórii Z9). Najlepší riešitelia okresného kola kategórie Z9 budú pozvaní do krajského kola.

O poradí v okresných a krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak *X* a práve traja žiaci (vrátane *X*) dosiahnu rovnako veľa bodov ako *X*, tak žiakovi *X* patrí v poradí 6.–8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

Termíny 69. ročníka Matematickej olympiády:

kategória	okresné kolo	krajské kolo
Z5	29. január 2020	—
Z6, Z7, Z8	7. apríl 2020	—
Z9	29. január 2020	17. marec 2020

Pokyny a rady súťažiacim:

Riešenie súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Jozef Plachý, 7.C
 ZŠ Hodžova ul. 5, 949 01 Nitra
 Úloha Z7-I-2

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Riešenie píšete tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup, podrobne vysvetlite, ako ste uvažovali. Uvedomte si, že sa hodnotí nielen výsledok, ku ktorému ste došli, ale hlavne správnosť úvah, ktoré k nemu viedli. Práce, ktoré nebudú spĺňať tieto podmienky, alebo budú odovzdané po termíne, nebudú do súťaže prijaté.

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh MO prajú

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
 SKMO, úlohová komisia pre kategórie Z

Mgr. Peter Novotný, PhD.
 predseda Slovenskej komisie MO

Archív zadaní a riešení úloh MO nájdete na internetových stránkach:

<http://www.olympiady.sk>

<http://skmo.sk>

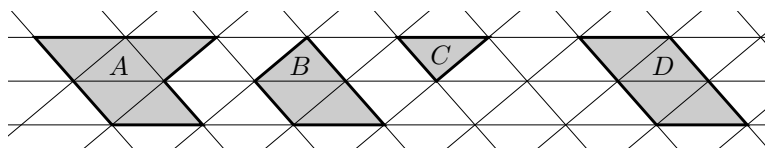
KATEGÓRIA Z6

Z6 – I – 1

Stará mama povedala vnúčatám: „Dnes mám 60 rokov a 50 mesiacov a 40 týždňov a 30 dní.“
Kolké narodeniny mala stará mama naposledy? (Libuše Hozová)

Z6 – I – 2

Na obrázku je trojuholníková sieť a v nej štyri mnohoúhelníky. Obvody mnohoúhelníkov A , B a D sú postupne 56 cm, 34 cm a 42 cm. Určte obvod trojuholníka C .



(Karel Pazourek)

Z6 – I – 3

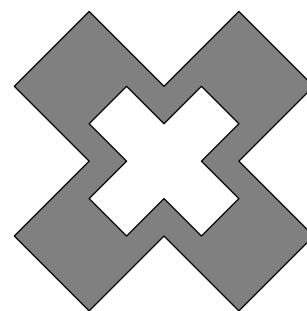
Na písomke bolo 25 úloh trojakého druhu: ľahké po 2 bodoch, stredne ťažké po 3 bodoch a ťažké po 5 bodoch. Správne vyriešené úlohy boli hodnotené uvedeným počtom bodov podľa stupňa obťažnosti, inak 0. Najlepšie možné celkové hodnotenie písomky bolo 84 bodov. Peter správne vyriešil všetky ľahké úlohy, polovicu stredne ťažkých a tretinu ťažkých. Kolkó bodov získal Peter za svoju písomku? (Alžbeta Bohiniková)

Z6 – I – 4

Raz si kráľ zavolať všetky svoje pážatá a postavil ich do radu. Prvému pážaťu dal určitý počet dukátov, druhému dal o dva dukáty menej, tretiemu opäť o dva dukáty menej a tak ďalej. Keď došiel k poslednému pážaťu, dal mu príslušný počet dukátov, otočil sa a obdobným spôsobom postupoval na začiatok radu (t.j. predposlednému pážaťu dal o dva dukáty menej ako pred chvíľou poslednému atď.). Na prvé páža v tomto kole vyšli dva dukáty. Potom jedno z pážat zistilo, že má 32 dukátov. Kolkó mohol mať kráľ pážat a kolkó celkom im mohol rozdať dukátov? Určte všetky možnosti. (Karel Pazourek)

Z6 – I – 5

Útvar na obrázku vznikol tak, že z veľkého kríža bol vystrihnutý malý kríž. Každý z týchto krížov môže byť zložený z piatich zhodných štvorcov, pričom strany malých štvorcov sú polovičné vzhľadom na strany veľkých štvorcov. Obsah vystrihnutého útvaru je 45 cm^2 . Aký je obsah veľkého kríža? (Lucie Růžičková)



Z6 – I – 6

Majka skúmala viacciferné čísla, v ktorých sa po jednej striedajú nepárne a párne cifry. Tie, ktoré začínajú nepárnou cifrou, nazvala komické a tie, ktoré začínajú párnou cifrou, nazvala veselé. (Např. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.) Medzi trojcifernými číslami určte, či je viac komických alebo veselých, a o kolkó. (Monika Dillingerová)

KATEGÓRIA Z7

Z7 – I – 1

Snehulienka so siedmimi trpaslíkmi nazbierali šišky na táborák. Snehulienka povedala, že počet všetkých šišiek je číslo deliteľné dvoma. Prvý trpaslík prehlásil, že je to číslo deliteľné tromi, druhý trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné štyrmi, tretí trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné piatimi, štvrtý trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné šiestimi, piaty trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné siedmimi, šiesty trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné ôsmimi, siedmy trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné deviatimi. Dvaja z ôsmich zberačov, ktorí sa k počtu šišiek vyjadrovali bezprostredne po sebe, nemali pravdu, ostatní áno. Koľko šišiek bolo na hromade, ak ich určite bolo menej ako 350? (Libuše Hozová)

Z7 – I – 2

V ostrouhlom trojuholníku KLM je V priesečník jeho výšok a X je päta výšky na stranu KL . Os uhla XVL je rovnobežná so stranou LM a uhol MKL má veľkosť 70° . Akú veľkosť majú uhly KLM a KML ? (Libuše Hozová)

Z7 – I – 3

Roman má rád kúzla a matematiku. Naposledy čaroval s trojcifernými alebo štvorcifernými číslami takto:

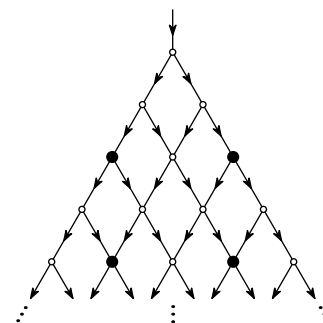
- z daného čísla vytvoril dve *pomocné* čísla tak, že ho rozdelil medzi ciframi na mieste stoviek a desiatok (napr. z čísla 581 by dostal 5 a 81),
- pomocné čísla sčítal a zapísal výsledok (v uvedenom príklade by dostal 86),
- od väčšieho z pomocných čísel odčítal menšie a výsledok zapísal za predchádzajúci súčet, čím vyčaroval výsledné číslo (v uvedenom príklade by dostal 8676).

Z ktorých čísel mohol Roman vyčarovať a) 171, b) 1513? Určte všetky možnosti. Aké najväčšie číslo možno takto vyčarovať a z ktorých čísel môže vzniknúť? Určte všetky možnosti.

(Monika Dillingerová)

Z7 – I – 4

Janka a Marienku zaujalo vodné dielo, ktorého časť je znázornená na obrázku. Korytá sa postupne rozdeľujú a zasa spájajú v načrtnutých bodoch, v každom rade je o jeden taký bod viac ako v rade predchádzajúcom. Voda prúdi v naznačených smeroch a pri každom vetvení sa vodný tok rozdelí do dvoch koryt s rovnakým prietokom. Janka zaujímalo, koľko vody preteká v súčte štyrmi miestami zvýraznenými čierne. Marienku zaujímalo, koľko vody preteká v súčte všetkými miestami, ktoré sú v 2019. rade. Porovnajzte celkové prietoky Jankovými a Marienkinými miestami.



(Katarína Jasenčáková)

Z7 – I – 5

Hviezdny štvorec je taká štvorcová tabuľka čísel, pre ktorú platí, že súčty čísel v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch sú stále rovnaké. Na obrázku je pozostatok hviezdneho štvorca, v ktorom boli čísla v jednom riadku a jednom stĺpci zotreté. Doplňte chýbajúce čísla tak, aby všetky boli celé a práve štyri záporné. Určte všetky možnosti.

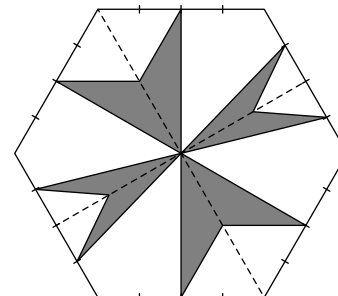
1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

(Eva Semerádová)

Z7 – I – 6

Z pravidelného šesťuholníka bol vystrihnutý útvar ako na obrázku. Pritom vyznačené body ako na obvode, tak vnútri šesťuholníka delia prislúchajúce úsečky na štvrtiny. Aký je pomer obsahov pôvodného šesťuholníka a vystrihnutého útvaru?

(Alžbeta Bohiniková)



KATEGÓRIA Z8

Z8 – I – 1

Zostrojte kosoštvorec $ABCD$ tak, aby jeho uhlopriečka BD mala veľkosť 8 cm a vzdialenosť vrcholu B od priamky AD bola 5 cm. Určte všetky možnosti. (Karel Pazourek)

Z8 – I – 2

Richard sa pohrával s dvoma päťcifernými číslami. Každé pozostávalo z navzájom rôznych cifier, ktoré pri jednom boli všetky nepárne a pri druhom všetky párne. Po chvíli zistil, že súčet týchto dvoch čísel začína dvojčíslím 11 a končí číslom 1 a že ich rozdiel začína číslom 2 a končí dvojčíslím 11. Určte Richardove čísla. (Monika Dillingerová)

Z8 – I – 3

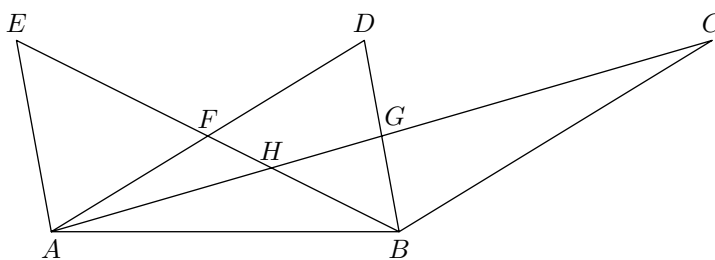
Vendelín býva medzi dvoma zastávkami autobusu, a to v troch osminách ich vzdialenosti. Dnes vyrazil z domu a zistil, že či by utekal k jednej, alebo druhej zastávke, dorazil by na zastávku súčasne s autobusom. Priemerná rýchlosť autobusu je 60 km/h. Akou priemernou rýchlosťou dnes beží Vendelín? (Libuše Hozová)

Z8 – I – 4

Pre päťicu celých čísel platí, že keď k prvému pripočítame jednotku, druhé umocníme na druhú, od tretieho odčítame trojku, štvrté vynásobíme štyrmi a piate vydělíme piatimi, dostaneme zakaždým ten istý výsledok. Nájdite všetky také päťice čísel, ktorých súčet je 122. (Lenka Dedková)

Z8 – I – 5

Pre osem navzájom rôznych bodov ako na obrázku platí, že body C, D, E ležia na priamke rovnobežnej s priamkou AB , F je stredom úsečky AD , G je stredom úsečky AC a H je priesečníkom priamok AC a BE . Obsah trojuholníka BCG je 12 cm^2 a obsah štvoruholníka $DFHG$ je 8 cm^2 . Určte obsahy trojuholníkov AFE , AHF , ABG a BGH .



(Eva Semerádová)

Z8 – I – 6

V Kocúrkove používajú mince iba s dvoma hodnotami, ktoré sú vyjadrené v kocúrkovských korunách kladnými celými číslami. Pomocou dostatočného množstva takých mincí je možné zaplatiť akúkoľvek celočíselnú sumu väčšiu ako 53 kocúrkovských korún, a to presne a bez vydávania. Sumu 53 kocúrkovských korún však bez vydávania zaplatiť nemožno. Zistite, ktoré hodnoty mohli byť na kocúrkovských minciach. Určte aspoň dve riešenia.

(Alžbeta Bohiniková)

KATEGÓRIA Z9

Z9 – I – 1

Ondro, Maťo a Kubo sa vracajú zo zbierania orechov, dokopy ich majú 120. Maťo sa sťažuje, že Ondro má ako vždy najviac. Otec prikáže Ondrovi, aby prisypal zo svojho Maťovi tak, aby mu počet orechov zdvojnásobil. Teraz sa sťažuje Kubo, že najviac má Maťo. Na otcov príkaz prisype Maťo Kubovi tak, že mu počet orechov zdvojnásobí. Na to sa hnevá Ondro, že najmenej zo všetkých má teraz on. Kubo teda prisype Ondrovi tak, že mu počet orechov zdvojnásobí. Teraz majú všetci rovnako a konečne je klud. Koľko orechov mal pôvodne každý z chlapcov?
(Marta Volfová)

Z9 – I – 2

V trojuholníku ABC leží bod P v tretine úsečky AB bližšie bodu A , bod R je v tretine úsečky PB bližšie bodu P a bod Q leží na úsečke BC tak, že uhly PCB a RQB sú zhodné. Určte pomer obsahov trojuholníkov ABC a PQC .
(Lucie Růžičková)

Z9 – I – 3

Pre ktoré celé čísla x je podiel $\frac{x+11}{x+7}$ celým číslom? Nájdite všetky riešenia. (Libuše Hozová)

Z9 – I – 4

Matúš dopadol padákom na ostrov obývaný dvoma druhmi domorodcov: Pochivcami, ktorí vždy hovoria pravdu, a Klamármi, ktorí vždy klamú. Pred dopadom zahliadol v diaľke prístav, ku ktorému sa hodlal dostať. Na prvom rázcestí stretol Matúš jedného domorodca a obďaleč videl druhého. Požiadal prvého, aby sa spýtal toho druhého, či je Klamár, alebo Pochivec. Prvý domorodec Matúšovi vyhovel, išiel sa spýtať a keď sa vrátil, oznámil Matúšovi, že druhý domorodec tvrdí, že je Klamár. Potom sa Matúš prvého domorodca spýtal, ktorá cesta vedie k prístavu. Ten mu jednu cestu ukázal a ďalej si Matúša nevsímal. Má, alebo nemá Matúš domorodcovi veriť? Vedie, alebo nevedie táto cesta k prístavu?
(Marta Volfová)

Z9 – I – 5

Majka skúmala viacciferné čísla, v ktorých sa po jednej striedajú nepárne a párne cifry. Tie, ktoré začínajú nepárnou cifrou, nazvala komické a tie, ktoré začínajú párnou cifrou, nazvala veselé. (Např. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.) Majka vytvorila jedno trojciferné komické a jedno trojciferné veselé číslo, pričom šesť použitých cifier bolo navzájom rôznych a nebola medzi nimi 0. Súčet týchto dvoch čísel bol 1617. Súčin týchto dvoch čísel končil dvojčíslím 40. Určte Majkine čísla a dopočítajte ich súčin.
(Monika Dillingerová)

Z9 – I – 6

Kristína zvolila isté nepárne prirodzené číslo deliteľné tromi. Jakub s Dávidom potom skúmali trojuholníky, ktoré majú obvod v milimetroch rovný Kristínou zvolenému číslu a ktorých strany majú dĺžky v milimetroch vyjadrené navzájom rôznymi celými číslami. Jakub našiel taký trojuholník, v ktorom najdlhšia zo strán má najväčšiu možnú dĺžku, a túto hodnotu zapísal na tabuľu. Dávid našiel taký trojuholník, v ktorom najkratšia zo strán má najväčšiu možnú dĺžku, a túto hodnotu tiež zapísal na tabuľu. Kristína obe dĺžky na tabuli správne sčítala a vyšlo jej 1 681 mm. Určte, ktoré číslo Kristína zvolila.
(Lucie Růžičková)

Na ukážku uvádzame *uzorové riešenie* jednej úlohy zo staršej olympiády:

Úloha Z8 – II – 1.

Daný je obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú zmenšíme o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. Dĺžky strán obdĺžnika označíme a , b . Nový obdĺžnik má dĺžky strán $a + 4$, $b - 5$. Podľa podmienky úlohy pre obsahy oboch obdĺžnikov platí

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Postupne upravíme

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20, \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40. \end{aligned}$$

Odčítali sme 20, aby sme mohli ľavú stranu upraviť na súčin

$$(a - 4)(b + 5) = -40.$$

Riešenie nájdeme rozkladom čísla -40 na dva činitele. Pritom musí byť $a > 0$, $b > 0$, a teda $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$.

Sú dve také možnosti: $(-2) \cdot 20 = -40$ a $(-1) \cdot 40 = -40$.

V prvom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami $a = 2$, $b = 15$ s obsahom $S = 30$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, t. j. $S' = 2S$.

V druhom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami $a = 3$, $b = 35$ s obsahom $S = 105$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210 = 2S$.

Úloha má teda dve riešenia. Daný obdĺžnik môže mať strany buď 2 a 15 alebo 3 a 35.

Na záver jedna rada:

Úlohy nie sú ľahké. Nenechajte sa odradiť, keď neobjavíte hneď riešenie. Experimentujte, kreslite si, „hrajte sa“ s úlohou. Niekedy pomôže pozrieť sa do nejakej knižky, kde nájdete podobné úlohy vyriešené, inokedy sa môže stať, že zrazu o tri dni „z ničoho nič“ na riešenie prídete.

Matematickú olympiádu vyhlasuje Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR spolu s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). Súťaž riadi Slovenská komisia MO (SKMO), v jednotlivých krajoch a okresoch krajské a okresné komisie MO. Na jednotlivých školách súťaž zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa vždy obracajte na svojho učiteľa matematiky.

Napokon by sme Vás radi upozornili na rôzne korešpondenčné semináre určené pre ZŠ a OG. Tieto súťaže sú nielen dobrou formou prípravy na MO, ale všeobecne pomôžu v zdokonaľovaní matematického myslenia. K tomu prispievajú aj veľmi populárne záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. SKMO Vám odporúča napr. seminár SEZAM organizovaný pod hlavičkou JSMF Žilina, na tvorbe zadaní tohto seminára sa priamo podieľajú aj niekoľkí členovia Úlohovej komisie MO. Viacerí členovia SKMO zasa spolupracujú v združení STROM (so sídlom na UPJŠ Košice) pri organizovaní seminárov MATIK a MALYNÁR. Zapojiť sa môžete tiež do seminárov PIKOMAT (organizuje ho P-MAT, n.o.) či RIEŠKY (usporadúva ho Gymn. Grösslingová v Bratislave). Podrobné informácie získate na internetových stránkach sezam.sk, strom.sk, www.pikommat.sk a riesky.sk.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

69. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 – domáce kolo

- Autori úloh: Mgr. Alžbeta Bohiniková, Mgr. Lenka Dedková,
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., PaedDr. Libuše Hozová,
Mgr. Katarína Jasenčáková, Mgr. Karel Pazourek,
Mgr. Lucie Růžičková, PhDr. Eva Semerádová,
doc. PhDr. Marta Volfová, CSc.
- Recenzenti: PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., Mgr. Alžbeta Bohiniková,
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., Mgr. Veronika Hucíková,
Mgr. Katarína Jasenčáková, Mgr. Erika Novotná, PhD.,
Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. Mgr. Miroslava Farkas Smitková, PhD.
- Redakčná úprava: Mgr. Peter Novotný, PhD.
- Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019