

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

M A T E M A T I C K Á O L Y M P I Á D A PRE ŽIAKOV ZÁKLADNÝCH ŠKÔL A NIŽŠÍCH ROČNÍKOV VIACROČNÝCH GYMNÁZIÍ

69. ročník, školský rok 2019/2020

Domáce kolo

Kategórie **Z5, Z6, Z7, Z8, Z9** – zadania úloh (maďarská verzia)



Kedves Diákok!

Kedvelitek az érdekes matematikai feladatokat és szívesen versenyeznétek ezek megoldásában? Ha így van, kapcsolódjatok be a matematikai olimpia (MO) versenybe!

A verseny önkéntes, független a matematikában elért osztályzattól. A matematikai olimpia egyes kategóriáinak feladatai közül ebben a füzetben azokat találjátok meg, amelyeket az alapiskolás tanulóknak (AI), valamint a nyolcosztályos gimnáziumok (NyG) első négy osztályát látogató diákoknak szántunk.

A **Z5** kategóriában az AI 5. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z6** kategóriában az AI 6. osztályos tanulói és a NyG 1. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z7** kategóriában az AI 7. osztályos tanulói és a NyG 2. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z8** kategóriában az AI 8. osztályos tanulói és a NyG 3. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z9** kategóriában az AI 9. osztályos tanulói és a NyG 4. osztályos tanulói versenyeznek.

Ebben a kategóriában részt vehetnek az ötéves kétnyelvű gimnáziumok első („előkészítő“) évfolyamának tanulói is.

Matematika-tanárotok jóváhagyásával a felsőbb osztályos tanulóknak szánt kategóriák valamelyikében vagy a középiskolások részére kiírt A, B, C kategóriák egyikében is versenyezhettek (a középiskolásoknak szánt feladatok külön füzetben jelentek meg).

A verseny menete

A Z5, Z6, Z7 és Z8 kategóriákban házi és járási forduló van. A Z9 kategóriában a házi és a járási fordulót a kerületi forduló követi.

A házi fordulóban kategóriánként 6-6 feladatot kell megoldanotok, ezeket a feladatokat tartalmazza ez a füzet. *A megoldásokat adjátok át matematika-tanárotoknak a következő határidők betartásával:*

kategória	az első feladathármas	a második feladathármas
Z5, Z9	2019 november 15	2019 december 11
Z6, Z7, Z8	2019 december 11	2020 február 28

Tanáraitok ellenőrzik és az alábbi jegyekkel értékelik a feladatok megoldását: 1 – *kitűnő*, 2 – *jó*, 3 – *nem felelt meg*. A házi fordulóban az a diák minősül sikeres megoldónak, aki legalább négy megoldására jó vagy kitűnő osztályzatot kapott. A Z5 – Z9 kategóriák esetében a házi forduló sikeres megoldóinak feladatmegoldásait az értékeléssel együtt az iskola elküldi a matematikai olimpia járási versenybizottságának. A versenybizottság a legjobb megoldókat meghívja a járási fordulóra. A járási fordulóban a versenyzők hasonló jellegű feladatokat kapnak, mint amilyeneket a házi fordulóban oldottak meg, ám a zárthelyi megoldásra csak meghatározott időtartam áll rendelkezésükre (a Z5, Z6, Z7, Z8 kategóriákban 2 óra, a Z9 kategóriában 4 óra), a versenyzők külső segítséget sem vehetnek igénybe. A Z9 kategória járási fordulóinak legjobb megoldóit a szervezők meghívják a kerületi fordulóra.

A sorrendről a járási, ill. kerületi fordulóban az egyes feladatokban elért pontok összege dönt. Például, ha pontosan 5 diák ér el több pontot, mint az X nevű diák és pontosan három diák (beleértve X -et) ér el éppen annyi pontot, mint X , akkor X diáknak a sorrendben a 6.–8. helyezés jár, vagy rövidebben a 6. helyezés. Hasonló eljárással határozzuk meg az összes diák helyezését. Semmilyen egyéb kritériumok nem használhatók.

A Matematikai Olimpia 69. évfolyamának időrendje:

kategória	járási forduló	kerületi forduló
Z5	2020 január 29	—
Z6, Z7, Z8	2020 április 7	—
Z9	2020 január 29	2020 március 17

Útmutató és tanácsok

A versenyfeladatok megoldását A4-es lapokra írtok olvashatóan! Minden feladatot új lapon kezdjétek kidolgozni, a bal felső sarokba az alábbi minta szerint írtok a fejléctet:

Nagy János, 7.C

Harmat Utcai Alapiskola, 979 01 Dunaszerdahely

Z7-I-2 feladat

Az utolsó adat a fejlécen a feladatnak a füzetben megadott száma. A megoldást úgy írtok le, hogy gondolatmenetek követhető legyen. Tudnotok kell, hogy nemcsak a feladatok megoldását értékeljük, hanem főleg következtetéseitek helyességét, azt a módot, ahogyan a megoldáshoz eljutottatok. A fenti feltételeket nem teljesítő vagy a határidőn túl leadott munkákat a versenyben nem vesszük figyelembe.

Örömteli és sikeres versenyzést kívánnak

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
SKMO, úlohová komisia pre kategórie Z

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

A MO feladatainak és azok megoldásainak archívuma a következő internetoldalakon található:

<http://www.olympiady.sk>

<http://skmo.sk>

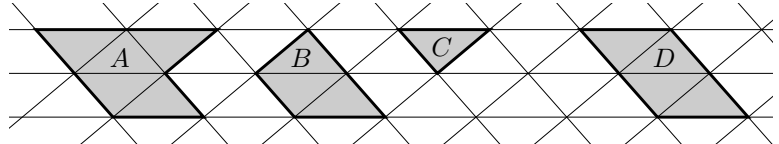
Z6 KATEGÓRIA

Z6 – I – 1

Nagymama azt mondta az unokáinak: „Ma vagyok 60 éves, 50 hónapos, 40 hetes és 30 napos.“
Hányadik születésnapját ünnepelte Nagymama legutóbb? *(Libuše Hozová)*

Z6 – I – 2

Az ábrán egy háromszögháló látható, benne négy sokszöggel. Az A , B és a D sokszögek kerületei sorra 56 cm, 34 cm és 42 cm. Mennyi a C háromszög kerülete?



(Karel Pazourek)

Z6 – I – 3

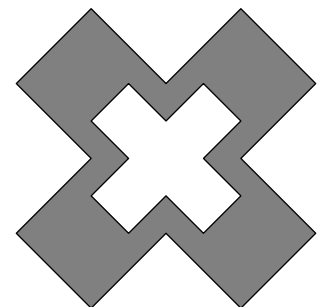
Egy összesen 25 feladatból álló dolgozatban könnyű, közepesen nehéz és nehéz feladatok voltak. A jól megoldott könnyű feladat 2 pontot ért, a közepes 3 pontot, a nehéz 5 pontot, máskülönben 0 ponttal volt értékelve. A jól megoldott dolgozattal maximálisan 84 pontot lehetett elérni. Peti jól megoldotta az összes könnyű feladatot, a közepesen nehéz feladatok felét és a nehéz feladatok egyharmadát. Hány pontot kapott Peti a dolgozatára? *(Alžbeta Bohiniková)*

Z6 – I – 4

Egyszer egy király összehívta a szolgálait és sorba állította őket. Az elsőnek bizonyos számú dukátot adott, a másodiknak kettővel kevesebbet, a harmadiknak ismét két dukáttal kevesebbet és így tovább. Amikor az utolsó szolgálhoz ért, neki is odaadta a megfelelő számú dukátot, majd visszafelé haladva folytatta az osztogatást (tehát két dukáttal kevesebbet adott az utolsó előtti szolgának, mint előtte az utolsó). Az első szolgának ebben a körben 2 dukát jutott. Ekkor az egyik szolga megszámolta, hogy neki 32 dukátja van. Hány szolgálja volt a királynak és hány dukátot osztott szét közöttük? Keressétek meg az összes lehetőséget! *(Karel Pazourek)*

Z6 – I – 5

Az ábrán látható alakzat úgy keletkezett, hogy a nagy keresztből kivágtak egy kis keresztet. Mindkét kereszt kirakható 5 egybevágó négyzetből. Tudjuk, hogy a kis négyzet oldalhossza a nagy négyzet oldalhosszának a fele. A szürke alakzat területe 45 cm^2 . Mennyi a nagy kereszt területe? *(Lucie Růžičková)*



Z6 – I – 6

Marika olyan több számjegyből álló számokat vizsgált, amelyekben a páros és a páratlan számjegyek rendszeresen (egyesével) váltakoznak. Azokat, amelyek páratlan számjeggyel kezdődnek komikusoknak, amelyek páros számjeggyel kezdődnek vidámaknak nevezte. (Pl. a 32387 szám komikus, a 4529 szám vidám.) Vizsgáljátok meg, hogy a háromjegyű számok között komikus vagy vidám számból van-e több, és mennyivel. *(Monika Dillingerová)*

Z7 – I – 1

Hófehérke és a hét törpe tobozokat gyűjtöttek a tábortűzhöz. Hófehérke azt mondta, hogy az összes toboz száma osztható kettővel. Ezután az első törpe kijelentette, hogy ez a szám osztható hárommal, majd a második törpe azt mondta, hogy ez a szám osztható négygel, a harmadik törpe azt mondta, hogy ez a szám osztható öttel, a negyedik törpe azt mondta, hogy ez a szám osztható hattal, az ötödik törpe azt mondta, hogy ez a szám osztható héttel, a hatodik törpe azt mondta, hogy ez a szám osztható nyolccal, a hetedik törpe azt mondta, hogy ez a szám osztható kilenccel. A nyolc tobozgyűjtő közül ketten közvetlenül egymás után nem mondtak igazat, a többiek igen. Hány tobozt gyűjtöttek össze, ha ez a szám biztosan kisebb, mint 350?
(Libuše Hozová)

Z7 – I – 2

A hegyesszögű KLM háromszögben V a magasságok metszéspontja és X a KL oldalra merőleges magasság talppontja. Az XVL szög szögfelezője párhuzamos az LM oldallal, valamint az MKL szög nagysága 70° . Mekkora a KLM és KML szögek?
(Libuše Hozová)

Z7 – I – 3

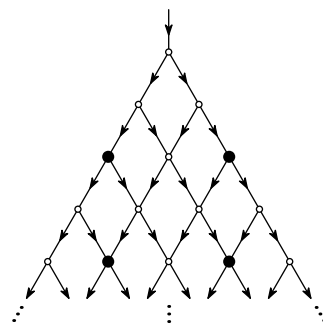
Robinak tetszik a bűvészet és a matematika. Legutóbb a három- vagy négyjegyű számokkal bűvészkedett a következőképpen:

- az adott számból két új számot alkotott úgy, hogy az adott számot kétfelé osztotta a tízesek és a százask között (pl. az 581-ből 5-öt és 81-et kapott),
- az új számokat összeadta és az eredményt lejegyezte (ebben az esetben 86-ot kapott volna),
- az előző pontban kapott új számok közül a nagyobból kivonta a kisebbet és az eredményt az előbb lejegyzett összeg után írta (ebben az esetben 8676-ot kapott volna).

Milyen számokból varázsolhatott Robi a) 171-et, b) 1513-at? Határozzátok meg az összes lehetőséget! Melyik a legnagyobb így előállítható szám és mely számokból lehet elővarázsolni? Adjátok meg az összes lehetőséget!
(Monika Dillingerová)

Z7 – I – 4

Jancsi és Juliska érdeklődött egy vízerőmű iránt, aminek egy része az ábrán látható. A folyómedrek szétágazódnak, majd újra összekapcsolódnak a jelzett pontokban, amelyekből minden sorban eggyel több van, mint az előzőben. A víz a kijelölt irányban áramlik, és minden szétágazódásnál két egyenlő vízáramú mederre oszlik. Jancsit érdekelte, hogy mennyi víz folyik át összesen a négy feketével kijelölt helyen. Juliskát viszont az érdekelte, hogy mennyi víz folyik át összesen a 2019. sorban levő helyeken. Hasonlítsátok össze az egész vízáramot a Jancsi és a Juliska által kiválasztott helyeken!



(Katarína Jasenčáková)

Z7 – I – 5

A csillagnégyzet a számok egy olyan négyzet alakú táblázata, amelyre érvényes, hogy a számok összege az egyes sorokban és oszlopokban mindig ugyanannyi. Az ábrán egy ilyen csillagnégyzet maradványa látható, amelyből egy oszlop és egy sor számai kitörölődtek. Egészítsétek ki a hiányzó számokat, ha tudjuk, hogy mindegyik egész szám és pontosan négy negatív. Adjátok meg az összes lehetőséget!

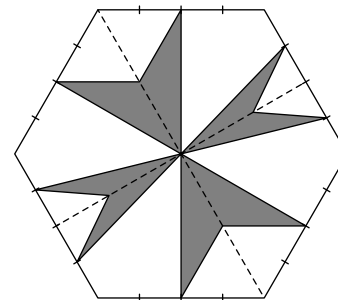
1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

(Eva Semerádová)

Z7 – I – 6

A szabályos hatszögből kivágtunk egy alakzatot, ahogyan az ábrán látható. A kijelölt pontok a hatszög kerületén és a belsejében is négy egyenlő részre osztják a megfelelő szakaszokat. Mennyi az eredeti hatszög és a kivágott rész területének aránya?

(Alžbeta Bohiniková)



Z8 KATEGÓRIA

Z8 – I – 1

Szerkesszettek olyan $ABCD$ rombuszt, amelynek BD átlója 8 cm-es, és B csúcsának távolsága az AD egyenestől 5 cm. Adjátok meg az összes lehetőséget! (Karel Pazourek)

Z8 – I – 2

Ricsi két ötjegyű számmal játszadozott. Mindkét szám kölcsönösen különböző számjegyekből állt, amelyek az egyik számban mind páratlanok, a másikban mind párosak voltak. Ricsi nem sokára észrevette, hogy a két szám összege 11-gyel kezdődik és 1-sel végződik, különbségük pedig 2-vel kezdődik és 11-gyel végződik. Határozzátok meg Ricsi számait! (Monika Dillingerová)

Z8 – I – 3

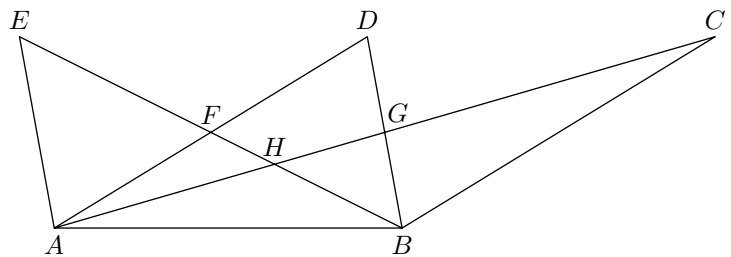
Vendi két buszmegálló között lakik, a távolságuk három nyolcadánál. Ma, amikor elindult otthonról, rájött, hogy mindegy melyik buszmegállóhoz fut, így is, úgy is a busszal egyszerre érkezne oda. Az autóbusz átlagsebessége 60 km/h. Milyen átlagsebességgel fut Vendi? (Libuše Hozová)

Z8 – I – 4

Az egész számok ötös csoportjára érvényes, hogy ha az első számhoz hozzáadunk egyet, a másodikat négyzetre emeljük, a harmadikból elveszünk hármat, a negyediket megszorozzuk négygyel, az ötödiket elosztjuk öttel, mindig ugyanazt az eredményt kapjuk. Keressétek meg az egész számok összes ilyen tulajdonságú ötös csoportját, amely tagjainak összege 122. (Lenka Dedková)

Z8 – I – 5

Nyolc különböző pontra (lásd az ábrát) érvényes, hogy a C, D, E pontok az AB egyenessel párhuzamos egyenesen vannak, F az AD szakasz felezőpontja, G az AC szakasz felezőpontja, és H az AC és BE egyenesek metszéspontja. A BCG háromszög területe 12 cm^2 , a $DFHG$ négyszög területe 8 cm^2 . Számítsátok ki az AFE , AHF , ABG és BGH háromszögek területeit! (Eva Semerádová)



Z8 – I – 6

Bolondfalván csak kétféle értékű pénzermét használnak, amelyek értéke bolondfalvi koronában kifejezve pozitív egész szám. Elegendő mennyiségű ilyen pénzermével bármely 53 bolondfalvi koronánál nagyobb egész összeget pontosan ki lehet fizetni (nincs visszajáró). Viszont 53 bolondfalvi koronát nem lehet pontosan kifizetni, csak úgy, hogy a kifizetett összegből visszaadnak (mindig van visszajáró). Milyen értékűek a bolondfalvi pénzermék? Adjátok meg legalább két-féle megoldást! (Alžbeta Bohiniková)

Z9 KATEGÓRIA

Z9 – I – 1

Adris, Matyi és Kende diót szedtek, összesen 120 dióval tértek haza. Matyi elégedetlenkedett, hogy megint Andrisnak lett a legtöbb diója - mint mindig. Apa megparancsolta Andrisnak, hogy adjon annyi diót Matyinak, hogy annak kétszer annyi diója legyen, mint eredetileg volt. Most meg Kende panaszkodott, hogy Matyinak lett a legtöbb diója. Apa parancsára Matyi annyi diót adott Kendének, hogy a diói száma megduplázódott. Ekkor meg Andris mérgelődött, hogy neki lett a legkevesebb diója. Kende annyi diót adott Andrisnak, hogy a diói száma megduplázódott. Most végre mindenkinek ugyanannyi diója lett. Mennyi diója volt eredetileg mindegyik fiúnak?

(Marta Volfová)

Z9 – I – 2

A P pont az ABC háromszög AB oldalának A ponthoz közelebbi harmadoló pontja. Az R pont a PB szakasz P ponthoz közelebbi harmadoló pontja. A Q pont a BC szakasz olyan pontja, amelyre a PCB és RQB szögek egybevágók. Mennyi az ABC és PQC háromszögek területének aránya?

(Lucie Růžičková)

Z9 – I – 3

Milyen x egész számokra lesz az $\frac{x+11}{x+7}$ tört egész szám? Keressétek meg az összes megoldást!

(Libuše Hozová)

Z9 – I – 4

Matyi ejtőernyőjével egy olyan szigetre ugrott, ahol kétféle bennszülött élt: az igazmondók, akik mindig igazat mondtak, és a hazugok, akik mindig hazudtak. Mielőtt földet ért volna, Matyi a távolban meglátott egy kikötőt, ahová el szeretett volna jutni. Az első útelágazásnál Matyi egy bennszülöttel találkozott, kissé távolabb pedig egy másikat látott. Megkérte az elsőt, hogy kérdezze meg a másodikat, hogy az hazug vagy igazmondó. A bennszülött eleget tett Matyi kérésének, és azzal a válasszal tért vissza, hogy a másik bennszülött azt állítja magáról, hogy hazug. Ezután Matyi megkérdezte az első bennszülöttet, hogy melyik út vezet a kikötőhöz. Az rámutatott az egyik útra és tovább nem törődött Matyival. Higgyen Matyi a bennszülöttnak, vagy nem? Az általa mutatott út vezet a kikötőbe, vagy nem?

(Marta Volfová)

Z9 – I – 5

Marika olyan több számjegyből álló számokat vizsgált, amelyekben egyesével váltakoznak a páros és a páratlan számjegyek. Azokat, amelyek első számjegye páratlan, komikus számoknak, amelyek első számjegye páros, vidám számoknak nevezte. (Pl. a 32387 szám komikus, a 4529 szám vidám.) Marika talált egy háromjegyű komikus és egy háromjegyű vidám számot úgy, hogy hat különböző számjegyet használt fel, amelyek között nem volt nulla. A két szám összege 1617 lett. A két szám szorzata 40-re végződött. Milyen számokat talált Marika és mennyi volt a szorzatuk?

(Monika Dillingerová)

Z9 – I – 6

Kriszta választott egy hárommal osztható páratlan természetes számot, Jakab és Dávid pedig azokat a háromszögeket vizsgálták, amelyek milliméterben mért kerülete megegyezett a Kriszta által kiválasztott számmal, valamint milliméterben mért oldalhosszaik kölcsönösen különböző egész számok. Jakab olyan háromszöget talált, amelyiknek a leghosszabb oldala eléri a lehető legnagyobb értéket – ezt felírta a táblára. Dávid olyan háromszöget talált, amelyben a legrövidebb oldal hossza a lehető legnagyobb érték – ezt szintén felírta a táblára. Kriszta hibátlanul összeadta a két felírt számot és 1681 mm-t kapott. Milyen számot választott eredetileg Kriszta?

(Lucie Růžičková)

Mintaként egy régebbi olimpiai feladat megoldását közöljük:

Z8 – II – 1 feladat

Adott egy olyan téglalap, melynek oldalhosszai egész számmal fejezhetőek ki. Ha egyik oldalának hosszát 4-gyel növeljük, másik oldalának hosszát pedig 5-tel csökkentjük, az eredeti téglalaphoz képest kétszer nagyobb területű téglalapot kapunk. Határozzátok meg az adott téglalap oldalhosszait! Találjátok meg az összes megoldást!

Megoldás. A téglalap oldalainak hosszát jelölje a , b . Az új téglalap oldalainak hossza $a + 4$, $b - 5$. A feladat feltétele szerint a két téglalap területére érvényes:

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Az egyenletet átalakítjuk:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20, \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40. \end{aligned}$$

Azért vonunk le 20-at, hogy az egyenlet bal oldalát szorzattá tudjuk átalakítani:

$$(a - 4)(b + 5) = -40.$$

A megoldást a -40 szám két tényezőre való bontásával kapjuk meg. Mivel érvényes $a > 0$ és $b > 0$, ezért $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$.

Két lehetőség van: $(-2) \cdot 20 = -40$ és $(-1) \cdot 40 = -40$.

Az első esetben olyan téglalapot kapunk, melynek oldalai $a = 2$, $b = 15$, területe $S = 30$. Az új téglalap oldalai eszerint $a' = 6$, $b' = 10$, területe pedig $S' = 60$, vagyis $S' = 2S$.

A második esetben olyan téglalapot kapunk, melynek oldalai $a = 3$, $b = 35$, területe pedig $S = 105$. Az új téglalap oldalai tehát $a' = 7$, $b' = 30$ területe pedig $S' = 210$ és megint érvényes, hogy $S' = 2S$.

A feladatnak tehát két megoldása van. Az adott téglalap oldalainak hossza vagy 2 és 15 vagy 3 és 35.

Végezetül egy jó tanács.

A feladatok nem könnyűek, ezért ne adjátok fel, ha mindjárt nem jöttök rá a megoldásra. Kísérletezzetek, rajzoljatok, „játszadozzatok el” a feladattal! Néha az segít, ha valamilyen könyvben utánanéztetek, és kerestek egy hasonló megoldott feladatot, de az is megtörténhet, hogy három nap múlva egyszer csak eszetekbe villan a helyes megoldás.

A versenyt a Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma a Szlovák Matematikusok és Fizikusok Egyesületével karöltve írja ki, és a Matematikai Olimpia Szlovákiai Bizottsága, járási szinten a járási bizottságok irányítják. Az iskolákban a versenyt a matematika-tanárok szervezik.

Kérdéseitekkel forduljatok matematika-tanároktokhoz.

Végül szeretnénk felhívni a figyelmeteket a különböző levelező szemináriumokra, amelyek az AI és a NyG diákjainak vannak szánva. Ezek a versenyek nem csak jó formái az MO-ra való felkészülésnek, hanem általában segítik tökéletesíteni a matematikai gondolkodást. Ehhez hozzájárulnak a nagyon népszerű befejező táborok a legjobb megoldók számára. Az SKMO

pl. a SEZAM szemináriumot ajánlja, amely JSMF Žilina égisze alatt működik. E szemináriumok feladatai alkotásában az MO Feladatbizottságának néhány tagja is részt vesz. Az SKMO több tagja viszont együttműködik a STROM egyesületben (UPJŠ Košice helyszínnel) a MATIK és MALYNÁR szemináriumok szervezésében. Részt vehettek a PIKOMAT szemináriumban (a P-MAT, n.o. szervezi), vagy a RIEŠKY szemináriumban (a pozsonyi Gymn. Grösslingová szervezi). Részletes információk a sezam.sk, strom.sk, www.pikomat.sk ill. riesky.sk honlapokon található.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

69. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Leták kategórií Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 – domáce kolo

- Autori úloh: Mgr. Alžbeta Bohiniková, Mgr. Lenka Dedková,
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., PaedDr. Libuše Hozová,
Mgr. Katarína Jasenčáková, Mgr. Karel Pazourek,
Mgr. Lucie Růžičková, PhD. Eva Semerádová,
doc. PhD. Marta Volfová, CSc.
- Recenzenti: PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., Mgr. Alžbeta Bohiniková,
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., Mgr. Veronika Hucíková,
Mgr. Katarína Jasenčáková, Mgr. Erika Novotná, PhD.,
Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. Mgr. Miroslava Farkas Smitková, PhD.
- Redakčná úprava: Mgr. Peter Novotný, PhD.
- Preklad: doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
- Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019