69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020 *Návodné úlohy domáceho kola kategórie B*

V prvej časti textu pod zadaním každej zo šiestich súťažných úloh nájdete zadania návodných a dopĺňajúcich úloh. Tie isté úlohy aj s riešeniami (resp. odpoveďami a náznakmi riešení či odkazmi na riešenia v našom archíve) nájdete v druhej časti textu.

---

1. *V reálnom obore uvažujme sústavu rovníc*

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$
$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálnym parametrom a.

a) Nájdite všetky hodnoty a, pre ktoré má uvedená sústava riešenie.

b) Dokážte, že pre ľubovoľné riešenie (x, y) tejto sústavy platí $x^2 + |y| \geqq 4$.

(*Ján Mazák*)

Návodné a dopĺňajúce úlohy:

N1. Pre ktoré hodnoty reálneho parametra a má sústava rovníc

$$x^2 + y^2 = a,$$
$$2x^2 + y^2 = a^2$$

riešenie v obore reálnych čísel?

N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x + y - z = 2a,$$
$$x - y + z = 2b,$$
$$-x + y + z = 2c.$$

s reálnymi parametrami a, b, c

N3. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí tzv. nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (AG-nerovnosť)

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Dokážte. Kedy nastane rovnosť?

N4. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d platí

$$(ab + cd)\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right) \geqq 4.$$

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

D2. Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré výraz $2x^2+y^2-2xy+2x+4$ nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.

D4. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2-12xy+y^4,$$

v ktorom x a y sú ľubovoľné celé nezáporné čísla.

D5. Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

pričom x je ľubovoľné reálne číslo. Pre ktoré x výraz V túto hodnotu nadobúda?

D6. Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

D7. Určte všetky reálne čísla p také, že pre ľubovoľné kladné čísla x, y platí nerovnosť

$$\frac{x^3+py^3}{x+y} \geqq xy.$$

D8. Nájdite všetky možné hodnoty súčtu $x+y$, kde reálne čísla x, y spĺňajú rovnosť $x^3+y^3=3xy$.

---

2. *Prirodzené číslo n má aspoň 73 dvojciferných deliteľov. Dokážte, že jedným z nich je číslo 60. Uveďte tiež príklad čísla n, ktoré má práve 73 dvojciferných deliteľov, vrátane náležitého zdôvodnenia.* (*Josef Tkadlec*)

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Prirodzené číslo n nie je deliteľné siedmimi. Dokážte, že má nanajvýš 85 deliteľov menších ako 100.

N2. Nájdite prirodzené číslo n, ktoré nie je deliteľné siedmimi a má práve 85 deliteľov menších ako 100.

N3. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo 2020^{2019}?

N4. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7$?

N5. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo $50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$?

D1. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo $20!$?

D2. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré má $n!$ viac dvojciferných deliteľov ako $(n-1)!$.

D3. Existuje prirodzené číslo n, že $n!$ je deliteľný práve polovicou zo všetkých dvojciferných čísel?

D4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.

D5. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.

D6. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 1\,999\}$, potom medzi vybranými existujú dve rôzne čísla, ktorých súčet sa rovná $2\,000$.

D7. Určte najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$, tak medzi vybranými číslami existujú dve, ktorých súčet alebo rozdiel je 667.

D8. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú rovnaký počet párnych a nepárnych deliteľov.

D9. Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15}. Určte n.

---

3. *Nech AC je priemer kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $ABCD$. Predpokladajme, že na polpriamkach opačných k polpriamkam AD a DC existujú postupne body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ také, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokážte tvrdenia:*

a) Body A', B, C' a D ležia na jednej kružnici k.

b) Ak je O stred kružnice k a O_A, O_C sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AA'B$, $CC'B$, tak platí $OO_A \perp OO_C$.

(*Jaroslav Švrček*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pripomeňte si Tálesovu vetu a všeobecnejší poznatok o obvodových a stredových uhloch v danej kružnici.

N2. Štyri rôzne body A, B, C, D ležia na jednej kružnici. Dokážte, že osi úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD prechádzajú tým istým bodom.

N3. Nech M je vnútorný bod základne BC rovnoramenného trojuholníka ABC. Na jeho ramene AB leží bod D tak, že $|MB| = |MD|$. Dokážte, že body A, C, M, D ležia na jednej kružnici.

D1. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD.

D2. Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Os uhla ABD pretína kružnicu k v bode E (rôznom od bodu B). Dokážte, že trojuholníky AEC a CBD sú podobné.

D3. Daná je kružnica k so stredom S a tetivou AB, ktorá nie je jej priemerom. Na polpriamke opačnej k polpriamke BA je vybraný ľubovoľný bod K rôzny od B. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKS pretína kružnicu k v takom bode C, ktorý je súmerne združený s bodom B podľa priamky SK.

D4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme D pätu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových súmernostiach postupne podľa priamok AB, AC. Ďalej označme E_1 a E_2 body na priamke BC také, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokážte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 ležia na jednej kružnici, ktorej stred leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

D5. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici.

D6. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu, ktorá prechádza bodmi B, C a dotýka sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte.

D7. V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD.

D8. Označme K ľubovoľný vnútorný bod strany AB daného trojuholníka ABC. Priamka CK pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AKL a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BKL.

a) Dokážte, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2.

b) Predpokladajme, že priamka AC je sečnicou kružnice k_1. Nech P ($P \neq A$) je priesečník priamky AC s kružnicou k_1 a Q ($Q \neq B$) je priesečník priamky BC s kružnicou k_2. Dokážte, že bod K leží na úsečke PQ.

D9. Dané sú kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL.

---

4. *Nech p, q sú dané nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak má rovnica*

$$px^2 - (p+q)x + p = 0$$

celočíselný koreň, tak má celočíselný koreň aj rovnica

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

(*Patrik Bak*)

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že ak a, b a c sú kladné reálne čísla, tak je kladný aj každý koreň kvadratickej rovnice $ax^2 - bx + c = 0$.

N2. Dokážte, že ak má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ celočíselné koeficienty a, b a c, tak každý jej koreň, ktorý je aj celým číslom, musí byť deliteľom čísla c.

N3. Nech prirodzené číslo a je deliteľom prirodzeného čísla b a súčasne číslo b je deliteľom a. Potom $a = b$. Dokážte.

N4. Prirodzené čísla a a b sú nesúdeliteľné, rovnako ako prirodzené čísla c a d. Dokážte, že z rovnosti $ac = bd$ potom vyplýva $a = d$ a $b = c$.

N5. Dokážte, že ak sú čísla a, b nesúdeliteľné, platí to isté aj o číslach a, $a + b$.

N6. Nech a je prirodzené číslo, určte všetky možné najväčšie spoločné delitele čísel a a $a^2 + 4$.

N7. Nech p je prirodzené číslo. Nájdite korene rovnice $px^2 + (p^2 - p + 1)x + p - 1 = 0$.

D1. Nájdite všetky trojciferné čísla n, ktorých druhá mocnina končí rovnakým trojčíslím ako druhá mocnina čísla $3n - 2$.

D2. Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice $a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0$.

D3. Nájdite všetky riešenia rovnice $xyz = 3(x + y + z)$ v obore celých kladných čísel. Riešenia, ktoré sa líšia iba poradím, nepovažujeme za rôzne.

D4. Koľko existuje celých kladných čísel $x \leqq 2\,002\,000$ takých, že číslo $2\,002\,000$ delí číslo $x^3 - x$?

D5. Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je deliteľné šiestimi práve pre tie prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ deliteľné trinástimi. Dokážte.

---

5. *Dané sú kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode T. Ich spoločná vonkajšia dotyčnica sa dotýka kružnice a v bode T_a a kružnice b v bode T_b. Pomocou r_a, r_b vyjadrite pomer polomerov kružníc k_a, k_b opísaných postupne trojuholníkom T_aAT, T_bBT.* (Šárka Gergelitsová)

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nech V_a a V_b sú päty výšok trojuholníka ABC postupne z vrcholov A a B a V je priesečník jeho výšok. a) Dokážte, že body A, B, V_a, V_b ležia na jednej kružnici. b) Dokážte, že body V, V_a, C, V_b ležia na jednej kružnici.

N2. Pripomeňte si znenie Euklidových viet o výške a odvesne pravouhlého trojuholníka.

N3. Kružnica k_b leží zvonka kružnice k_a a je s ňou disjunktná. Nech ich vonkajšie spoločné dotyčnice T_aT_b a T_AT_B ($T_a, T_A \in k_a$, $T_b, T_B \in k_b$, $T_a \neq T_A$ a $T_b \neq T_B$) pretínajú ich spoločnú vnútornú dotyčnicu V_aV_b ($V_a \in k_a$, $V_b \in k_b$) postupne v bodoch A a B. Dokážte, že $|T_aT_b| = |T_AT_B| = |AB|$.

D1. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC.

D2. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S.

D3. Nech k je polkružnica zostrojená nad priemerom AB, ktorá leží vo vnútri štvorca $ABCD$. Uvažujme jej dotyčnicu t_1 z bodu C (rôznu od BC) a označme P jej priesečník so stranou AD. Nech t_2 je spoločná vonkajšia dotyčnica polkružnice k a kružnice vpísanej trojuholníku CDP (rôzna od AD). Dokážte, že priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé.

D4. Kružnice $k(S, r)$ a $l(O, R)$ sa zvonku dotýkajú v bode T. Ich spoločná dotyčnica v bode T pretína ich vonkajšiu spoločnú dotyčnicu v bode M. Dokážte, že trojuholník SOM je pravouhlý a vyjadrite jeho obsah pomocou polomerov r, R daných kružníc.

D5. V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.

D6. Kružnica k so stredom S je opísaná pravidelnému šesťuholníku $ABCDEF$. Dotyčnica v bode A ku kružnici k pretína priamku SB v bode K a dotyčnica v bode B pretína priamku SC v bode L. Dokážte, že štvoruholníku $KLCB$ sa dá opísať kružnica, ktorá je zhodná s kružnicou k.

---

6. *Figúrka strelca ohrozuje na šachovnici ľubovoľné políčko diagonály, na ktorej strelec stojí. Ak však na niektorom políčku diagonály stojí veža, strelec už políčka za ňou neohrozuje. Určte najväčší možný počet strelcov, ktorých môžeme spolu so štyrmi vežami umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Aký najväčší počet strelcov možno umiestniť na biele políčka šachovnice 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali?

N2. Určte najväčší počet strelcov, ktorých môžeme umiestniť na bielu hlavnú diagonálu šachovnice 8×8 spolu s dvoma vežami tak, aby sa navzájom neohrozovali v zmysle zadania súťažnej úlohy.

N3. Určte najväčší počet kráľov, ktorých môžeme umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali.

N4. Určte najväčší počet kráľov, ktorých môžeme umiestniť na šachovnicu 9×9 tak, aby sa navzájom neohrozovali.

D1. Nájdite najväčšie prirodzené číslo k, pre ktoré možno na šachovnicu 8×8 rozmiestniť k veží a $k + 14$ navzájom sa neohrozujúcich strelcov.

D2. Každý vrchol pravidelného devätnásťuholníka je ofarbený jednou zo šiestich farieb. Dokážte, že niektorý tupouhlý trojuholník má všetky vrcholy ofarbené rovnakou farbou.

D3. Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

D4. Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď tvaru L-tetromina. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí.

a) Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode.
b) Zdôvodnite, prečo žiadnych sedem otázok takú istotu nedáva.

D5. Na niektoré políčko šachovnice 6×6 postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz.

D6. Políčka tabuľky $n \times n$, kde $n \geqq 3$, sú striedavo čierne a biele ako na obyčajnej šachovnici, pričom políčko v ľavom hornom rohu je čierne. Biele políčka budeme farbiť načierno nasledujúcim postupom. V jednom kroku vyberieme ľubovoľný obdĺžnik 2×3 alebo 3×2, v ktorom sú ešte tri biele políčka, a tieto tri políčka začiernime. Pre ktoré n môžeme po určitom počte krokov začierniť celú tabuľku?

D7. Zistite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platia jednotlivé tvrdenia a), b) a c): Ak obsadíme figúrkami ľubovoľných k polí šachovnice 8×8, budú obsadené niektoré a) tri susedné polia niektorého riadku, b) tri susedné polia niektorého šikmého radu, c) štyri susedné polia niektorého riadku alebo stĺpca.

Na nasledujúcich stranách nájdete tie isté návodné a doplňajúce úlohy ešte raz, avšak doplnené o výsledky s náznakmi riešení či o odkazy na náš archív.

1. *V reálnom obore uvažujme sústavu rovníc*

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$
$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálnym parametrom a.

a) Nájdite všetky hodnoty a, pre ktoré má uvedená sústava riešenie.

b) Dokážte, že pre ľubovoľné riešenie (x, y) tejto sústavy platí $x^2 + |y| \geqq 4$.

(*Ján Mazák*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre ktoré hodnoty reálneho parametra a má sústava rovníc

$$x^2 + y^2 = a,$$
$$2x^2 + y^2 = a^2$$

riešenie v obore reálnych čísel? [Riešime ako lineárnu sústavu rovníc s neznámymi x^2, y^2, dostaneme $x^2 = a^2 - a = a(a-1)$, $y^2 = 2a - a^2 = a(2-a)$. Z $x^2 \geqq 0$ dostaneme $a \in \mathbb{R} \setminus (0;1)$, z $y^2 \geqq 0$ máme $a \in \langle 0;2\rangle$, obe podmienky spĺňajú $a \in \{0\} \cup \langle 1;2\rangle$.]

N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x + y - z = 2a,$$
$$x - y + z = 2b,$$
$$-x + y + z = 2c.$$

s reálnymi parametrami a, b, c [$x = a + b$, $y = a + c$, $z = b + c$.]

N3. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí tzv. nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (AG-nerovnosť)

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Dokážte. Kedy nastane rovnosť? [Nerovnosť upravíme na $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$, ktorá zrejme platí. Rovnosť nastane iba v prípade $a = b$.]

N4. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d platí

$$(ab + cd)\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right) \geqq 4.$$

[Roznásobíme výraz na ľavej strane a využijeme nerovnosť $x + 1/x \geqq 2$ (platnú $\forall x > 0$) pre $x = a/d$ a pre $x = b/c$.]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geqq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť. [59-C-II-2]

D2. Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré výraz $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4$ nadobúda svoju najmenšiu hodnotu. [65-C-I-3, část a)]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. [59-C-I-5]

D4. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

v ktorom x a y sú ľubovoľné celé nezáporné čísla. [65-C-II-1]

D5. Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1 + 2x^2},$$

pričom x je ľubovoľné reálne číslo. Pre ktoré x výraz V túto hodnotu nadobúda? [64-B-II-2]

D6. Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2.$$

[63-B-I-2]

D7. Určte všetky reálne čísla p také, že pre ľubovoľné kladné čísla x, y platí nerovnosť

$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geqq xy.$$

[50-B-II-1]

D8. Nájdite všetky možné hodnoty súčtu $x+y$, kde reálne čísla x, y spĺňajú rovnosť $x^3 + y^3 = 3xy$. [48-B-I-6]

---

2. *Prirodzené číslo n má aspoň 73 dvojciferných deliteľov. Dokážte, že jedným z nich je číslo 60. Uveďte tiež príklad čísla n, ktoré má práve 73 dvojciferných deliteľov, vrátane náležitého zdôvodnenia.* (*Josef Tkadlec*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Prirodzené číslo n nie je deliteľné siedmimi. Dokážte, že má nanajvýš 85 deliteľov menších ako 100. [Číslo n určite nie je deliteľné 14 číslami z množiny $\{7, 14, 21, 28, \dots, 98\}$, teda počet jeho deliteľov menších ako 100 je nanajvýš $99 - 14 = 85$.]

N2. Nájdite prirodzené číslo n, ktoré nie je deliteľné siedmimi a má práve 85 deliteľov menších ako 100. [Za n stačí vziať súčin všetkých čísel menších ako 100, ktoré nie sú násobkami siedmich.]

N3. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo 2020^{2019}? [Keďže $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, dvojciferné delitele čísla 2020^{2019} budú práve tie, ktoré majú v prvočíselnom rozklade iba dvojky a päťky. Sú to čísla (usporiadané najskôr podľa mocnín čísla 5 a potom podľa mocnín čísla 2, ktoré ho delia)

$$2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \quad 5 \cdot 2 = 10, \quad 5 \cdot 2^2 = 20,$$
$$5 \cdot 2^3 = 40, \quad 5 \cdot 2^4 = 80, \quad 5^2 = 25, \quad 5^2 \cdot 2 = 50,$$

ktorých je práve 9.]

N4. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7$? [Tých je 36. To zistíme buď priamo ich vypísaním (10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80, 81, 84, 90, 96, 98), alebo zistením o zozname všetkých 21 dvojciferných prvočísel 11, 13, ..., 97, že majú spolu 54 dvojciferných násobkov, a to jednotlivo postupne 9, 7, 5 (dvakrát), 4, 3 (dvakrát), 2 (štyrikrát) a 1 (desaťkrát) – hľadaný počet je teda $90 - 54 = 36$.]

N5. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo $50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$? [Na rozdiel od predchádzajúcej úlohy je jednoduchšie spočítať čísla, ktoré deliteľmi nie sú. Sú to všetky prvočísla väčšie ako 50, tých je 10. Počet všetkých dvojciferných deliteľov tak je 80. Treba si rozmyslieť, že prvočísla menšie ako 50 sú obsiahnuté v čísle 50! v dostatočnej mocnine.]

D1. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo 20!? [Stačí vylúčiť prvočísla väčšie ako 20 a ich násobky, tých je 28. Počet všetkých dvojciferných deliteľov tak je 62. Treba si rozmyslieť, že prvočísla menšie ako 20 sú obsiahnuté v čísle 20! v dostatočnej mocnine.]

D2. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré má $n!$ viac dvojciferných deliteľov ako $(n-1)!$. [Určite sú to všetky prvočísla do sto, ktoré sú väčšie ako 3, a potom čísla, keď $n!$ obsahuje vyššiu mocninu nejakého prvočísla ako $(n-1)!$ takú, že táto mocnina je menšia ako sto, t. j. pre $p = 7$ je to $n = 14$, pre $p = 5$ $n = 10$, pre $p = 3$ $n = 6, 9$ a pre $p = 2$ $n = 4, 6, 8$, t. j. sú to všetky prvočísla od 5 do 97 a navyše $4, 6, 8, 9, 10, 14$.]

D3. Existuje prirodzené číslo n, že $n!$ je deliteľný práve polovicou zo všetkých dvojciferných čísel? [Treba brať prvočísla menšie ako sto od najväčšieho a pozerať sa, koľko jeho násobkov je menších ako 100. Ukáže sa, že 12! má 43 dvojciferných deliteľov a 13! má 50 dvojciferných deliteľov, t. j. 45 dvojciferných deliteľov nemá žiadne $n!$.]

D4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo. [56-B-I-3]

D5. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje. [58-C-I-5]

D6. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 1\,999\}$, potom medzi vybranými existujú dve rôzne čísla, ktorých súčet sa rovná 2 000. [49-C-S-1]

D7. Určte najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$, tak medzi vybranými číslami existujú dve, ktorých súčet alebo rozdiel je 667. [49-A-S-3]

D8. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú rovnaký počet párnych a nepárnych deliteľov. [Sú to čísla tvaru $2l$, pričom l je nepárne číslo. Každé hľadané číslo musí byť párne – vtedy však predpis $d \mapsto 2d$ určuje injektívne zobrazenie množiny všetkých jeho nepárnych deliteľov do množiny všetkých jeho párnych deliteľov, teda toto zobrazenie musí byť podľa zadania aj surjektívne, a preto je hľadané číslo tvaru $2l$, pričom l je jeho najväčší nepárny deliteľ.]

D9. Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15}. Určte n. [64-B-II-1]

---

3. *Nech AC je priemer kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $ABCD$. Predpokladajme, že na polpriamkach opačných k polpriamkam AD a DC existujú postupne body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ také, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokážte tvrdenia:*

a) Body A', B, C' a D ležia na jednej kružnici k.

b) Ak je O stred kružnice k a O_A, O_C sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AA'B$, $CC'B$, tak platí $OO_A \perp OO_C$.

(Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pripomeňte si Tálesovu vetu a všeobecnejší poznatok o obvodových a stredových uhloch v danej kružnici.

N2. Štyri rôzne body A, B, C, D ležia na jednej kružnici. Dokážte, že osi úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD prechádzajú tým istým bodom. [Je to stred kružnice prechádzajúcej bodmi A, B, C, D.]

N3. Nech M je vnútorný bod základne BC rovnoramenného trojuholníka ABC. Na jeho ramene AB leží bod D tak, že $|MB| = |MD|$. Dokážte, že body A, C, M, D ležia na jednej kružnici. [Z rovnoramenných trojuholníkov ABC a MBD vyplýva postupne zhodnosť uhlov ACM, ACB, CBA, MBD a MDB, posledný z nich je však vedľajší uhol k uhlu ADM, takže súčet uhlov pri protiľahlých vrcholoch C a D štvoruholníka $ADMC$ je rovný $180°$.]

D1. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD. [68-B-I-5]

D2. Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Os uhla ABD pretína kružnicu k v bode E (rôznom od bodu B). Dokážte, že trojuholníky AEC a CBD sú podobné. [68-B-S-3]

D3. Daná je kružnica k so stredom S a tetivou AB, ktorá nie je jej priemerom. Na polpriamke opačnej k polpriamke BA je vybraný ľubovoľný bod K rôzny od B. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKS pretína kružnicu k v takom bode C, ktorý je súmerne združený s bodom B podľa priamky SK. [68-B-II-3]

D4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme D pätu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových súmernostiach postupne podľa priamok AB, AC. Ďalej označme E_1 a E_2 body na priamke BC také, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokážte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 ležia na jednej kružnici, ktorej stred leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. [68-A-I-2]

D5. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici. [62-B-I-3]

D6. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu, ktorá prechádza bodmi B, C a dotýka sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte. [52-B-II-4]

D7. V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD. [57-B-II-3]

D8. Označme K ľubovoľný vnútorný bod strany AB daného trojuholníka ABC. Priamka CK pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AKL a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BKL.

   a) Dokážte, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2.
   b) Predpokladajme, že priamka AC je sečnicou kružnice k_1. Nech P ($P \neq A$) je priesečník priamky AC s kružnicou k_1 a Q ($Q \neq B$) je priesečník priamky BC s kružnicou k_2. Dokážte, že bod K leží na úsečke PQ. [53-A-II-3]

D9. Dané sú kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL. [60-A-I-3]

---

4. *Nech p, q sú dané nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak má rovnica*

$$px^2 - (p+q)x + p = 0$$

celočíselný koreň, tak má celočíselný koreň aj rovnica

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

(*Patrik Bak*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že ak a, b a c sú kladné reálne čísla, tak je kladný aj každý koreň kvadratickej rovnice $ax^2 - bx + c = 0$. [Ľavá strana rovnice je kladná pre každé $x \leqq 0$.]

N2. Dokážte, že ak má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ celočíselné koeficienty a, b a c, tak každý jej koreň, ktorý je aj celým číslom, musí byť deliteľom čísla c. [Vyplýva to z úpravy rovnice na tvar $c = -x(ax + b)$.]

N3. Nech prirodzené číslo a je deliteľom prirodzeného čísla b a súčasne číslo b je deliteľom a. Potom $a = b$. Dokážte. [Platí $a \leqq b$ aj $b \leqq a$.]

N4. Prirodzené čísla a a b sú nesúdeliteľné, rovnako ako prirodzené čísla c a d. Dokážte, že z rovnosti $ac = bd$ potom vyplýva $a = d$ a $b = c$. [Uvedomte si, kedy z $x \mid yz$ vyplýva $x \mid z$.]

N5. Dokážte, že ak sú čísla a, b nesúdeliteľné, platí to isté aj o číslach a, $a + b$. [Každý spoločný deliteľ čísel a, $a + b$ delí aj číslo $(a + b) - a = b$.]

N6. Nech a je prirodzené číslo, určte všetky možné najväčšie spoločné delitele čísel a a $a^2 + 4$. [Nech d je najväčší spoločný deliteľ oboch čísel, potom d delí číslo $(a^2 + 4) - a \cdot a = 4$. Najväčší spoločný deliteľ oboch čísel teda môže byť 1, 2 alebo 4. Prvá možnosť nastane pre a nepárne, druhá pre a deliteľné dvoma a nie štyrmi, tretia pre a deliteľné štyrmi.]

N7. Nech p je prirodzené číslo. Nájdite korene rovnice $px^2 + (p^2 - p + 1)x + p - 1 = 0$. [$x_1 = -1/p$, $x_2 = 1 - p$]

D1. Nájdite všetky trojciferné čísla n, ktorých druhá mocnina končí rovnakým trojčíslím ako druhá mocnina čísla $3n - 2$. [50-B-S-1]

D2. Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice $a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0$. [56-B-I-1]

D3. Nájdite všetky riešenia rovnice $xyz = 3(x + y + z)$ v obore celých kladných čísel. Riešenia, ktoré sa líšia iba poradím, nepovažujeme za rôzne. [36–B–II–3b]

D4. Koľko existuje celých kladných čísel $x \leqq 2\,002\,000$ takých, že číslo $2\,002\,000$ delí číslo $x^3 - x$? [41–B–I–6]

D5. Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je deliteľné šiestimi práve pre tie prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ deliteľné trinástimi. Dokážte. [45–B–I–4]

---

5. *Dané sú kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode T. Ich spoločná vonkajšia dotyčnica sa dotýka kružnice a v bode T_a a kružnice b v bode T_b. Pomocou r_a, r_b vyjadrite pomer polomerov kružníc k_a, k_b opísaných postupne trojuholníkom T_aAT, T_bBT.* (*Šárka Gergelitsová*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech V_a a V_b sú päty výšok trojuholníka ABC postupne z vrcholov A a B a V je priesečník jeho výšok. a) Dokážte, že body A, B, V_a, V_b ležia na jednej kružnici. b) Dokážte, že body V, V_a, C, V_b ležia na jednej kružnici. [a) Podľa Tálesovej vety je to kružnica s priemerom AB. b) Podľa Tálesovej vety je to kružnica s priemerom CV.]

N2. Pripomeňte si znenie Euklidových viet o výške a odvesne pravouhlého trojuholníka.

N3. Kružnica k_b leží zvonka kružnice k_a a je s ňou disjunktná. Nech ich vonkajšie spoločné dotyčnice T_aT_b a T_AT_B ($T_a, T_A \in k_a$, $T_b, T_B \in k_b$, $T_a \neq T_A$ a $T_b \neq T_B$) pretínajú ich spoločnú vnútornú dotyčnicu V_aV_b ($V_a \in k_a$, $V_b \in k_b$) postupne v bodoch A a B. Dokážte, že $|T_aT_b| = |T_AT_B| = |AB|$. [Prvá rovnosť vyplýva zo súmernosti podľa priamky prechádzajúcej stredmi oboch kružníc. Ďalej zo súmernosti platí $|T_aA| = |V_aA|$, $|T_bA| = |V_bA|$, $|T_AB| = |V_aB|$, $|T_BB| = |V_bB|$. Sčítaním týchto rovníc dostaneme $|T_aA| + |T_bA| + |T_AB| + |T_BB| = |V_aA| + |V_bA| + |V_aB| + |V_bB|$. Na ľavej strane rovnice je súčet (rovnakých) dĺžok $|T_aT_b|$ a $|T_AT_B|$, na pravej dvojnásobok $|AB|$, odtiaľ tak vyplýva druhá dokazovaná rovnosť.]

D1. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC. [58-C-I-2]

D2. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S. [58-C-II-4]

D3. Nech k je polkružnica zostrojená nad priemerom AB, ktorá leží vo vnútri štvorca $ABCD$. Uvažujme jej dotyčnicu t_1 z bodu C (rôznu od BC) a označme P jej priesečník so stranou AD. Nech t_2 je spoločná vonkajšia dotyčnica polkružnice k a kružnice vpísanej trojuholníku CDP (rôzna od AD). Dokážte, že priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé. [51-B-I-3]

D4. Kružnice $k(S, r)$ a $l(O, R)$ sa zvonku dotýkajú v bode T. Ich spoločná dotyčnica v bode T pretína ich vonkajšiu spoločnú dotyčnicu v bode M. Dokážte, že trojuholník SOM je pravouhlý a vyjadrite jeho obsah pomocou polomerov r, R daných kružníc. [50-C-II-2]

D5. V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H $(H \neq E)$. Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C $(E \neq C \neq H)$ a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D $(D \neq E)$. Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné. [66-B-II-3]

D6. Kružnica k so stredom S je opísaná pravidelnému šesťuholníku $ABCDEF$. Dotyčnica v bode A ku kružnici k pretína priamku SB v bode K a dotyčnica v bode B pretína priamku SC v bode L. Dokážte, že štvoruholníku $KLCB$ sa dá opísať kružnica, ktorá je zhodná s kružnicou k. [56-C-S-2]

---

6. *Figúrka strelca ohrozuje na šachovnici ľubovoľné políčko diagonály, na ktorej strelec stojí. Ak však na niektorom políčku diagonály stojí veža, strelec už políčka za ňou neohrozuje. Určte najväčší možný počet strelcov, ktorých môžeme spolu so štyrmi vežami umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňajúce úlohy:

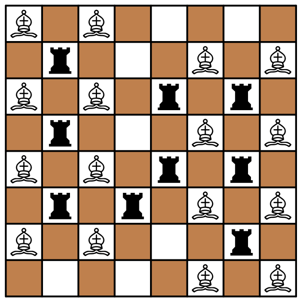
N1. Aký najväčší počet strelcov možno umiestniť na biele políčka šachovnice 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali? [Sedem. Na šachovnici uvažujme diagonály rovnobežné s bielou hlavnou diagonálou. Vrátane nej je ich práve 7. Na každú môžeme umiestniť nanajvýš jedného strelca. Keďže každé biele políčko leží na niektorej z týchto diagonál, môžeme na šachovnici umiestniť nanajvýš 7 strelcov. Vyhovujúce umiestnenie 7 strelcov môžeme vybrať napríklad tak, že budú v počtoch 4 a 3 v krajných stĺpcoch šachovnice.]

N2. Určte najväčší počet strelcov, ktorých môžeme umiestniť na bielu hlavnú diagonálu šachovnice 8×8 spolu s dvoma vežami tak, aby sa navzájom neohrozovali v zmysle zadania súťažnej úlohy. [Dve veže rozdelia diagonálu na nanajvýš tri časti. Na každú môžeme umiestniť nanajvýš jedného strelca. Preto je hľadaný počet strelcov nanajvýš tri. A týchto troch strelcov už vieme umiestniť na šachovnicu spolu s dvoma vežami požadovaným spôsobom, napríklad strelcov umiestnime na prvé, tretie a piate políčko a veže na druhé a štvrté políčko diagonály.]

N3. Určte najväčší počet kráľov, ktorých môžeme umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali. [Šachovnicu rozdelíme na 16 štvorcov $2 \times \times 2$, na každý z nich môžeme umiestniť nanajvýš jedného kráľa, preto je kráľov nanajvýš 16. Šestnásť kráľov už na šachovnicu umiestniť vieme, napríklad na tie políčka, ktorých obe súradnice sú nepárne.]

N4. Určte najväčší počet kráľov, ktorých môžeme umiestniť na šachovnicu 9×9 tak, aby sa navzájom neohrozovali. [Keď pridáme jeden riadok a jeden stĺpec šachovnice, dostaneme šachovnicu 10×10, na ktorú môžeme podľa podobnej úvahy ako v riešení N3 umiestniť nanajvýš 25 kráľov. A tých vieme umiestniť, napríklad na políčka, ktorých obe súradnice sú nepárne.]

D1. Nájdite najväčšie prirodzené číslo k, pre ktoré možno na šachovnicu 8×8 rozmiestniť k veží a $k+14$ navzájom sa neohrozujúcich strelcov. [$k = 18$. Celú šachovnicu možno rozložiť na sedem bielych diagonál dĺžok 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 a sedem čiernych diagonál takých istých dĺžok. Ak sa na ľubovoľnej z týchto 14 diagonál D nachádza k_D veží, je na nej nanajvýš $k_D + 1$ navzájom sa neohrozujúcich strelcov. Podľa zadania je však celkový počet strelcov o 14 väčší ako celkový počet veží, preto na každej uvažovanej diagonále D musí byť práve $k_D + 1$ strelcov. To je pre diagonály D dĺžok 2, 4, 6, 8 možné, iba ak zodpovedajúce k_D neprevyšuje postupne hodnoty 0, 1, 2, 3. Preto počet k veží na celej šachovnici neprevyšuje hodnotu $2(0+1+2+3+2+1+0) = 18$. Hodnota $k = 18$ je pritom možná, ako ukazuje príklad rozmiestnenia 9 veží a $9+7 = 16$ strelcov na bielych políčkach podľa obrázka; rozmiestnenie rovnakých počtov veží a strelcov na čiernych políčkach urobíme analogicky.]



D2. Každý vrchol pravidelného devätnásťuholníka je ofarbený jednou zo šiestich farieb. Dokážte, že niektorý tupouhlý trojuholník má všetky vrcholy ofarbené rovnakou farbou. [62-C-S-3]

D3. Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. [58-B-I-4]

D4. Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď tvaru L-tetromina. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí.

a) Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode.

b) Zdôvodnite, prečo žiadnych sedem otázok takú istotu nedáva. [58-B-II-2]

D5. Na niektoré políčko šachovnice 6×6 postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz. [65-A-III-6]

D6. Políčka tabuľky $n \times n$, kde $n \geqq 3$, sú striedavo čierne a biele ako na obyčajnej šachovnici, pričom políčko v ľavom hornom rohu je čierne. Biele políčka budeme farbiť načierno nasledujúcim postupom. V jednom kroku vyberieme ľubovoľný obdĺžnik 2×3 alebo 3×2, v ktorom sú ešte tri biele políčka, a tieto tri políčka začiernime. Pre ktoré n môžeme po určitom počte krokov začierniť celú tabuľku? [ČR-57-A-II-3]

D7. Zistite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platia jednotlivé tvrdenia a), b) a c): Ak obsadíme figúrkami ľubovoľných k polí šachovnice 8×8, budú obsadené niektoré a) tri susedné polia niektorého riadku, b) tri susedné polia niektorého šikmého radu, c) štyri susedné polia niektorého riadku alebo stĺpca. [49-C-I-3]