69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020 *Návodné úlohy domáceho kola kategórie C*

V prvej časti textu pod zadaním každej zo šiestich súťažných úloh nájdete zadania návodných a doplňajúcich úloh. Tie isté úlohy aj s riešeniami (resp. odpoveďami a náznakmi riešení či odkazmi na riešenia v našom archíve) nájdete v druhej časti textu.

---

1. *Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 13 také, že $\overline{ab} = \overline{cd}$.

N2. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$.

N3. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 8 také, že $\overline{ab} = \overline{cd}$.

D1. Nájdite najväčšie a najmenšie štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 13 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$.

D2. Nájdite všetky osemciferné čísla $\overline{abcdefgh}$ s ciferným súčtom 16 také, že $\overline{efgh} - \overline{abcd} = 1$.

---

2. *Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého všetky strany sú zhodné a protiľahlé strany rovnobežné. Bod P je taký, že štvoruholník $CDEP$ je rovnobežník. Dokážte, že bod P je stredom kružnice opísanej trojuholníku ACE a súčasne aj priesečníkom výšok trojuholníka BDF.* (Jakub Löwit)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a že sa navzájom rozpoľujú.

N2. Dokážte, že ak sú dve zhodné úsečky neležiace v jednej priamke rovnobežné, tvoria ich krajné body rovnobežník.

D1. Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má všetky strany zhodné a protiľahlé dvojice strán rovnobežné. Dokážte, že stred úsečky CF je totožný s priesečníkom priamok AD a BE.

D2. Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má všetky strany zhodné a protiľahlé dvojice strán rovnobežné. Označme X a Y priesečníky výšok trojuholníkov ACE a BDF. Dokážte, že v prípade $X \neq Y$ stred úsečky XY rozpoľuje úsečku AD.

---

3. *Určte všetky dvojice prirodzených čísel a a b, pre ktoré platí*

$$2 + 3(a, b) = ab,$$

pričom označuje najmenší spoločný násobok a (a, b) najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice a, b celých kladných čísel, pre ktoré platí $a \cdot [a, b] = 4 \cdot (a, b)$, pričom symbol $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a, b) najväčší spoločný deliteľ celých kladných čísel a, b.

N2. Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť $a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqq 2ab$. Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

D1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín $\{a \cdot [a, b], b \cdot (a, b)\} = \{45, 180\}$, pričom (x, y) označuje najväčší spoločný deliteľ a $[x, y]$ najmenší spoločný násobok čísel x a y.

D2. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť $\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\}$, pričom (x, y) a $[x, y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y.

---

4. *Vnútri strany BC trojuholníka ABC je daný bod K. Označme M stred strany BC a predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AK vedená bodom M pretína stranu AC vo vnútornom bode L. Dokážte, že priamka KL delí trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom.* (*Josef Tkadlec*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Presvedčte sa, že stredné priečky (t. j. spojnice stredov strán) delia ľubovoľný trojuholník na štyri zhodné trojuholníky.

N2. Uvedomte si, že dva trojuholníky majú zhodné obsahy, ak sa zhodujú ako v dvoch stranách, tak aj v k nim prislúchajúcich výškach. Použitím tohto pravidla vysvetlite, prečo jedna ťažnica ľubovoľného trojuholníka rozpoľuje jeho obsah, zatiaľ čo všetky tri ťažnice delia jeho obsah na šesť rovnako veľkých dielov.

D1. Uvedomte si, že dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane, majú svoje obsahy v pomere prislúchajúcich výšok na túto stranu. Použitím tohto pravidla vysvetlite, prečo tri úsečky, ktoré spájajú vrcholy trojuholníka s jeho ťažiskom, delia jeho obsah na tri rovnako veľké diely, bez toho, že pritom použijete výsledok úlohy N2.

D2. Nad preponou AB pravouhlého trojuholníka ABC zostrojme štvorec $ABDE$. Zistite (v závislosti od dĺžok strán trojuholníka), v akom pomere rozdeľuje priamka výšky z vrcholu C na preponu AB obsah štvorca $ABDE$.

D3. Uvedomte si, že dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej výške, majú svoje obsahy v pomere dĺžok strán, ktorým táto výška prislúcha. Použitím tohto pravidla potom dokážte tvrdenie: Ľubovoľný konvexný štvoruholník je svojimi uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky s obsahmi, ktoré možno označiť S_1, S_2, S_3 a S_4 tak, že platí $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ a že rovnosť $S_2 = S_4$ nastane práve vtedy, keď sú rovnobežné tie strany štvoruholníka, ktoré prislúchajú trojuholníkom s obsahmi S_1 a S_3.

5. *Tabuľku* 3×3 *máme vyplniť deviatimi danými číslami tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch. Rozhodnite, či je možné takú úlohu splniť s číslami*

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ak áno, zistite, koľkými spôsobmi možno úlohu splniť tak, aby najväčšie číslo bolo uprostred tabuľky. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčet čísel v každom riadku bolo párne číslo?

N2. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $2, 3, \dots, 10$ tak, aby v každom riadku bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch?

N3. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $4, 5, \dots, 12$ tak, aby v každom stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch?

D1. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčin čísel v každom riadku bol druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla?

D2. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčet čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol nejakým prvočíslom?

6. *Pre kladné reálne čísla* a, b, c *platí* $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqq 1$. *Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčtu* $a + b + c$. (Ján Mazák)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre kladné čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + ab \leqq 2$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčinu ab.

N2. Dokážte nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$ a zistite, kedy v nej nastáva rovnosť.

N3. Reálne čísla a, b, c majú súčet 3. Dokážte, že $3 \geqq ab + bc + ca$. Kedy nastane rovnosť?

D1. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 3, a každé z nich je nanajvýš 2. Dokážte, že platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9$.

D2. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu $V = (a^4 + b^4 + ab + 1)/(a + b)$.

Na nasledujúcich stranách nájdete tie isté návodné a doplňajúce úlohy ešte raz, avšak doplnené o výsledky s náznakmi riešení či o odkazy na náš archív.

1. *Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.* (*Patrik Bak*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 13 také, že $\overline{ab} = \overline{cd}$. [Také číslo $\overline{abab}$ neexistuje, lebo jeho ciferný súčet je párny.]

N2. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$. [Také číslo $\overline{ab(a-1)b}$ neexistuje, lebo jeho ciferný súčet je nepárny.]

N3. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 8 také, že $\overline{ab} = \overline{cd}$. [1313, 2222, 3131, 4040]

D1. Nájdite najväčšie a najmenšie štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 13 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$. [7060, 1606 – ak pripustíme zápis $\overline{06}$, inak 2515.]

D2. Nájdite všetky osemciferné čísla $\overline{abcdefgh}$ s ciferným súčtom 16 také, že $\overline{efgh} - \overline{abcd} = 1$. [Vysvetlite najskôr, prečo pri sčítaní $\overline{abcd} + 1$ musí nastať *práve jeden* prenos jednotky do vyššieho rádu, takže každé hľadané číslo je tvaru $\overline{abc9\,ab(c+1)0}$. Vyhovujú čísla 1029 1030, 1119 1120, 1209 1210, **2019 2020**, 2109 2110, 3009 3010.]

2. *Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého všetky strany sú zhodné a protiľahlé strany rovnobežné. Bod P je taký, že štvoruholník $CDEP$ je rovnobežník. Dokážte, že bod P je stredom kružnice opísanej trojuholníku ACE a súčasne aj priesečníkom výšok trojuholníka BDF.* (*Jakub Löwit*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a že sa navzájom rozpoľujú. [Uhlopriečky sú zároveň výškami rovnoramenných trojuholníkov s vrcholmi vo vrcholoch kosoštvorca.]

N2. Dokážte, že ak sú dve zhodné úsečky neležiace v jednej priamke rovnobežné, tvoria ich krajné body rovnobežník. [Dokreslite ďalšie dve úsečky, ktoré s danými úsečkami vytvoria konvexný štvoruholník. Jeho uhlopriečka rozdeľuje štvoruholník na dva trojuholníky, ktoré sú zhodné podľa vety *sus*.]

D1. Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má všetky strany zhodné a protiľahlé dvojice strán rovnobežné. Dokážte, že stred úsečky CF je totožný s priesečníkom priamok AD a BE. [$ACDF$ aj $ABDE$ sú rovnobežníky.]

D2. Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má všetky strany zhodné a protiľahlé dvojice strán rovnobežné. Označme X a Y priesečníky výšok trojuholníkov ACE a BDF. Dokážte, že v prípade $X \neq Y$ stred úsečky XY rozpoľuje úsečku AD. [Z rovnobežníkov $ABDE$ a $ACDF$ vidíme, že úsečky AD, BE a CF prechádzajú jedným bodom. Ten určuje stredovú súmernosť, v ktorej si zodpovedajú ako body A, D, tak body C, F i body E, B, a teda aj trojuholníky ACE a DFB. Preto sú podľa stredu úsečky AD súmerne združené nielen priesečníky výšok spomenutých trojuholníkov (ako sme mali ukázať), ale aj ich ťažiská, stredy im opísaných aj stredy im vpísaných kružníc. Rovnaké závery platia aj pre tri ďalšie dvojice súmerne združených trojuholníkov (ABC, DEF), (ABF, DEC) a (AEF, DBC).]

3. *Určte všetky dvojice prirodzených čísel a a b, pre ktoré platí*

$$2[a,b]+3(a,b)=ab,$$

pričom $[a,b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a,b) najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice a, b celých kladných čísel, pre ktoré platí $a \cdot [a,b] = 4 \cdot (a,b)$, pričom symbol $[a,b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a,b) najväčší spoločný deliteľ celých kladných čísel a, b. [62-C-S-2]

N2. Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a,b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a,b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť $a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] \geqq 2ab$. Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. [60-C-I-5]

D1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín $\{a\cdot[a,b], b\cdot(a,b)\} = \{45,180\}$, pričom (x,y) označuje najväčší spoločný deliteľ a $[x,y]$ najmenší spoločný násobok čísel x a y. [61-C-S-1]

D2. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť $\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\}$, pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y. [61-C-I-3]

---

4. *Vnútri strany BC trojuholníka ABC je daný bod K. Označme M stred strany BC a predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AK vedená bodom M pretína stranu AC vo vnútornom bode L. Dokážte, že priamka KL delí trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom.* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Presvedčte sa, že stredné priečky (t. j. spojnice stredov strán) delia ľubovoľný trojuholník na štyri zhodné trojuholníky. [Stredné priečky sú rovnobežné s protiľahlými stranami, a preto sú všetky štyri trojuholníky podobné. Zhodnosť vyplýva z toho, že stredné priečky rozpoľujú jednotlivé strany.]

N2. Uvedomte si, že dva trojuholníky majú zhodné obsahy, ak sa zhodujú ako v dvoch stranách, tak aj v k nim prislúchajúcich výškach. Použitím tohto pravidla vysvetlite, prečo jedna ťažnica ľubovoľného trojuholníka rozpoľuje jeho obsah, zatiaľ čo všetky tri ťažnice delia jeho obsah na šesť rovnako veľkých dielov. [V trojuholníku ABC s ťažnicami AA_1, BB_1, CC_1 a ťažiskom T pre prvé tvrdenie o ťažnici AA_1 použite pravidlo na dvojicu trojuholníkov (ABA_1, ACA_1), pre druhé tvrdenie o šiestich dieloch navyše aj na dvojice (ATC_1, BTC_1), (BTA_1, CTA_1) a (CTB_1, ATB_1).]

D1. Uvedomte si, že dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane, majú svoje obsahy v pomere prislúchajúcich výšok na túto stranu. Použitím tohto pravidla vysvetlite, prečo tri úsečky, ktoré spájajú vrcholy trojuholníka s jeho ťažiskom, delia jeho obsah na tri rovnako veľké diely, bez toho, že pritom použijete výsledok úlohy N2. [Ťažisko má od každej strany trojuholníka trikrát menšiu vzdialenosť ako protiľahlý vrchol.]

D2. Nad preponou AB pravouhlého trojuholníka ABC zostrojme štvorec $ABDE$. Zistite (v závislosti od dĺžok strán trojuholníka), v akom pomere rozdeľuje priamka výšky z vrcholu C na preponu AB obsah štvorca $ABDE$. [Podľa Euklidovej vety o odvesne to je $a^2 : b^2$, pretože priamka výšky z vrcholu C delí štvorec na dva obdĺžniky so spoločnou stranou.]

D3. Uvedomte si, že dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej výške, majú svoje obsahy v pomere dĺžok strán, ktorým táto výška prislúcha. Použitím tohto pravidla potom dokážte tvrdenie: Ľubovoľný konvexný štvoruholník je svojimi uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky s obsahmi, ktoré možno označiť S_1, S_2, S_3 a S_4 tak, že platí $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ a že rovnosť $S_2 = S_4$ nastane práve vtedy, keď sú rovnobežné tie strany štvoruholníka, ktoré prislúchajú trojuholníkom s obsahmi S_1 a S_3. [Ak označíme dotyčné obsahy S_i štyroch trojuholníkov v kruhovom poradí okolo ich spoločného vrcholu, oba pomery $S_1 : S_2$ a $S_4 : S_3$ budú zhodné s pomerom, v akom jedna z uhlopriečok štvoruholníka delí jeho druhú uhlopriečku. Rovnosť $S_2 = S_4$ je ekvivalentná s rovnosťou $S_1+S_2 = S_1+S_4$, ktorá je rovnosťou obsahov dvoch trojuholníkov so spoločnou stranou.]

---

5. *Tabuľku 3×3 máme vyplniť deviatimi danými číslami tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch. Rozhodnite, či je možné takú úlohu splniť s číslami*

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ak áno, zistite, koľkými spôsobmi možno úlohu splniť tak, aby najväčšie číslo bolo uprostred tabuľky. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčet čísel v každom riadku bolo párne číslo? [Nie, keďže potom by musel byť aj súčet všetkých čísel párny a $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$.]

N2. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $2, 3, \dots, 10$ tak, aby v každom riadku bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch? [Áno, vyhovuje napríklad vyplnenie riadkov trojicami čísel $(2, 6, 8)$, $(4, 5, 9)$ a $(3, 7, 10)$ v akomkoľvek poradí.]

N3. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $4, 5, \dots, 12$ tak, aby v každom stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch? [Nie. Súčet všetkých 9 čísel je 72, takže súčet troch stĺpcových maxím by musel byť 36, čo je viac ako $10 + 11 + 12$.]

D1. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčin čísel v každom riadku bol druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla? [Nie, keďže súčin zadaných čísel nie je druhou mocninou.]

D2. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčet čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol nejakým prvočíslom? [Áno, jedno z riešení je zľava doprava a zhora nadol s číslami postupne 1, 3, 7, 6, 9, 2, 4, 5, 8.]

6. *Pre kladné reálne čísla a, b, c platí* $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \leqq 1$. *Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčtu* $a+b+c$. *(Ján Mazák)*

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre kladné čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + ab \leqq 2$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčinu ab. [Využite odhad $2ab \leqq a^2+b^2$, najväčšia hodnota $ab = 2/3$ sa dosiahne pre $a = b = \sqrt{2/3}$.]

N2. Dokážte nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$ a zistite, kedy v nej nastáva rovnosť. [Prenásobíme dvoma a upravíme na tvar $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqq 0$, rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = b = c$.]

N3. Reálne čísla a, b, c majú súčet 3. Dokážte, že $3 \geqq ab + bc + ca$. Kedy nastane rovnosť? [Vyplýva z rovnosti $9 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ a z predošlej úlohy. Rovnosť nastane jedine v prípade $a = b = c = 1$.]

D1. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 3, a každé z nich je nanajvýš 2. Dokážte, že platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9$. [68-C-I-3]

D2. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2+b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu $V = (a^4 + b^4 + ab + 1)/(a + b)$. [68-B-I-4]