69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Predpokladajme, že navzájom rôzne reálne čísla a, b, c, d spĺňajú nerovnosti*

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

Ak a je z týchto štyroch čísel najväčšie, ktoré z nich je najmenšie? (Josef Tkadlec)

Riešenie. Nerovnosť medzi prvými dvoma výrazmi upravíme odčítaním pravej strany a následným postupným vynímaním:

$$\begin{aligned} ab + cd - bc - ad &> 0,\\ a(b-d) - c(b-d) &> 0,\\ (a-c)(b-d) &> 0. \end{aligned}$$

Keďže platí $a > c$, musí byť aj druhá zátvorka kladná, a platí tak $b > d$.

Podobnú úpravu urobíme pre nerovnosť $bc + ad > ac + bd$, čím získame

$$\begin{aligned} bc + ad - ac - bd &> 0,\\ b(c-d) - a(c-d) &> 0,\\ (b-a)(c-d) &> 0. \end{aligned}$$

Prvá zátvorka je vďaka $a > b$ záporná, a preto musí byť záporná aj tá druhá. Z toho usúdime, že $d > c$.

Odvodili sme tak reťazec nerovností $a > b > d > c$, z ktorého vidíme, že najmenším zo štvorice čísel a, b, c, d môže byť jedine c.

Poznámka 1. Keďže prevedené úpravy boli ekvivalentné, môžeme konštatovať, že ak pre reálne čísla a, b, c, d platí $a > b > d > c$ sú obe nerovnosti zo zadania úlohy splnené.

Poznámka 2. Porovnaním prvého výrazu s posledným možno analogickým spôsobom dokázať nerovnosť $b > c$. Ak je táto nerovnosť dokázaná spolu s $d > c$, stačí to na úplné riešenie. Ak však dokážeme iba $b > c$ a $b > d$, je stále možné, že $c > d$.

- Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z ktorých tri prislúchajú dôkazu každej z nerovností $b > d$ a $d > c$ (prípadne $b > c$ a $d > c$). Ak je dokázaná dvojica nerovností $b > c$ a $b > d$, dajte 4 body.
- Za nájdenie jedného zo súčinových tvarov $(a-c)(b-d) > 0$, $(b-a)(c-d) > 0$, $(a-d)(b-c) > 0$ dajte dva body. V prípade nájdenia viacerých súčinových tvarov dajte štyri body, ak prislúchajúce nerovnosti vedú na úplné riešenie (pozri poznámku na konci riešenia), a tri body ak nie.
- Existencia vyhovujúcej štvorice čísel je zaručená už v zadaní, a netreba tak uvádzať príklad. Z rovnakého dôvodu nie je nutné pri akýchkoľvek úpravách postupovať ekvivalentne a ani prípadnú ekvivalenciu spomínať.

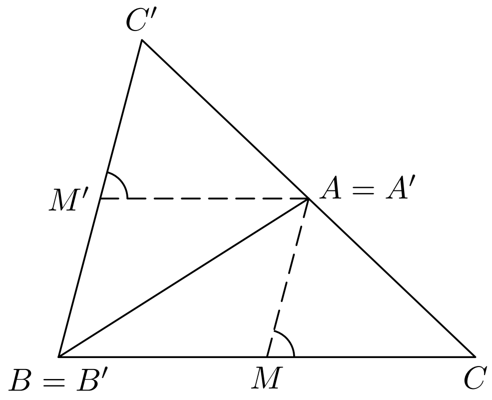
2. *Pre trojuholníky ABC a $A'B'C'$ platí*

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'|, \quad |\measuredangle BAC| + |\measuredangle B'A'C'| = 180^\circ.$$

Ukážte, že veľkosť uhla zovretého stranou BC a ťažnicou z vrcholu A je rovnaká ako veľkosť uhla zovretého stranou $B'C'$ a ťažnicou z vrcholu A'. (Patrik Bak)

Riešenie. Vo všetkých riešeniach budeme označovať M, M' zodpovedajúce stredy strán BC, $B'C'$. Potom stačí dokázať rovnosť $|\measuredangle AMC| = |\measuredangle A'M'C'|$.

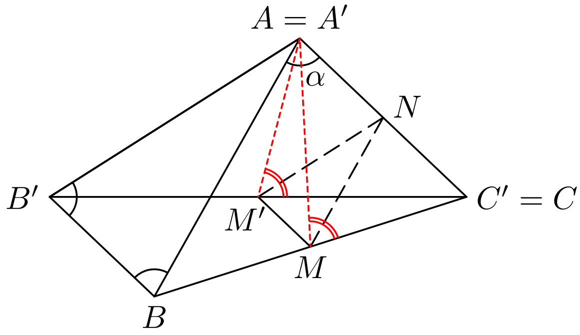
Prvé riešenie. Trojuholníky ABC a $A'B'C'$ umiestnime do roviny tak, aby bolo $A' = A$, $B' = B$ a C' bol obraz bodu C v stredovej súmernosti podľa bodu A, čo možno práve vďaka predpokladanej rovnosti $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle B'A'C'| = 180^\circ$. Úsečky AM', AM sú tak stredné priečky trojuholníka BCC' (obr. 1), takže štvoruholník $BMAM'$ je rovnobežník. Zo zhodnosti jeho vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch M a M' už vyplýva zhodnosť vyznačených uhlov AMC a $A'M'C'$, ktorú sme chceli dokázať.



Obr. 1

Druhé riešenie. Budeme navyše predpokladať, že $|\measuredangle BAC| \neq |\measuredangle B'A'C'|$, lebo inak by tvrdenie úlohy vyplývalo priamo zo zhodnosti pravouhlých trojuholníkov ABC a $A'B'C'$. Vzhľadom na symetriu potom stačí uvažovať iba ten prípad, keď uhol BAC je ostrý.

Umiestnime oba trojuholníky tak, aby bolo $A' = A$, $C' = C$ a B' bol taký bod polroviny ACB, že $|\measuredangle B'AC| = 180^\circ - |\measuredangle BAC|$, pričom $|AB'| = |AB|$ (obr. 2).



Obr. 2

Teraz stačí dokázať, že štvoruholník $AM'MC$ je tetivový, lebo potom platí želané $|\measuredangle AMC| = |\measuredangle AM'C| = |\measuredangle A'M'C'|$ podľa vety o obvodovom uhle.

Ak označíme $\alpha = |\measuredangle BAC|$, má uhol $B'AB$ veľkosť $|\measuredangle B'AC| - \alpha = 180° - 2\alpha$. Z rovnoramennosti trojuholníka ABB' potom vyplýva, že $|\measuredangle ABB'| = \alpha$, čiže $BB' \parallel AC$. Keďže MM' je strednou priečkou trojuholníka CBB', platí aj $MM' \parallel BB'$, a teda aj $MM' \parallel AC$. Pre stred N strany AC navyše platí $|MN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|AB'| = |M'N|$, takže os úsečky MM' prechádza bodom N. To už ale znamená, že lichobežník $AM'MC$ je rovnoramenný, a teda aj tetivový, čo sme chceli dokázať.

Tretie riešenie. Dokážeme zhodnosť trojuholníkov MAC, $M'C'A'$ podľa vety *sss* výpočtom. Zo zhodnosti potom vyplynie aj požadovaná rovnosť uhlov. Pri štandardnom označení strán oboch daných trojuholníkov podľa kosínusovej vety pre trojuholník $A'B'C'$ platí

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos(180° - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

Pre dĺžku ťažnice t_a pritom platí známy vzťah $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Dosadením za a^2 z kosínusovej vety pre trojuholník ABC získame

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}{4} = \frac{a'^2}{4},$$

a teda $a'/2 = t_a$, čiže $|M'C'| = |MA|$. Rovnosť $|M'A'| = |MC|$ dokážeme analogicky, a keďže podľa zadania platí aj $|AC| = |C'A'|$, sú trojuholníky MAC, $M'C'A'$ naozaj zhodné.

Štvrté riešenie. Iný výpočet založíme na vyjadrení $\cos |\measuredangle AMC|$ pomocou b, c a $\cos \alpha$. Ako v predchádzajúcom riešení použijeme známy vzťah $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ a tiež kosínusovú vetu $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Z kosínusovej vety pre trojuholník AMC a uvedených vzťahov postupne dostávame:

$$\begin{aligned}
\cos |\measuredangle AMC| &= \frac{\frac{1}{4}a^2 + t_a^2 - b^2}{at_a} = \frac{a^2 + 4t_a^2 - 4b^2}{4at_a} = \frac{2c^2 - 2b^2}{4at_a} = \frac{c^2 - b^2}{2at_a} = \\
&= \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha)(2b^2 + 2c^2 - a^2)}} = \\
&= \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha)(b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha)}} = \\
&= \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4b^2c^2 \cos^2 \alpha}}.
\end{aligned}$$

Použitím tohto vzorca pre trojuholník $A'B'C'$ s prvkami $b' = b$, $c' = c$ a $\alpha' = 180° - \alpha$ dostávame vďaka $\cos^2 \alpha = \cos^2(180° - \alpha)$ rovnosť $\cos |\measuredangle AMC| = \cos |\measuredangle A'M'C'|$, a teda $|\measuredangle AMC| = |\measuredangle A'M'C'|$, čo sme chceli dokázať.

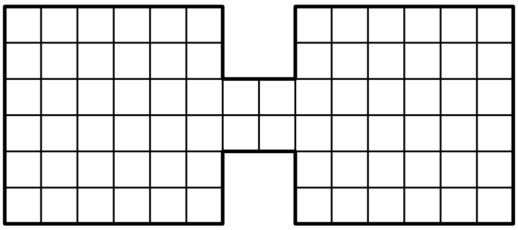
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V prípade neúplných riešení postupujte nasledovne:

- ▷ Za ľubovoľnú konštrukciu, v ktorej riešiteľ využije rovnosť $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle B'A'C'| = 180°$ na netriviálne zistenie (napr. tri body ležia na jednej priamke, štyri body ležia na kružnici), dajte 2 body. Za konštrukciu, vďaka ktorej riešiteľ netriviálne preformuluje dokazované tvrdenie (napríklad – ako v druhom riešení – na to, že body A, M', M, C ležia na jednej kružnici), dajte tiež 2 body. Preto ak je splnené oboje, dajte body štyri.

▷ Za správny výpočet vedúci k $|AM| = |B'C'|/2$ dajte tri body. Rovnako tak za vyjadrenie $\cos|\measuredangle AMC|$ iba pomocou b, c a α. Vzťah pre dĺžku ťažnice stačí uviesť ako (známy) fakt. Za samotné jeho uvedenie ale body neudeľujte.
▷ Body udelené za geometrickú konštrukciu nemožno sčítať s bodmi udelenými za výpočty.
▷ Ak riešiteľ úlohu vyrieši pomocou konštrukcie, ktorá predpokladá $|\measuredangle BAC| < 90°$ alebo podobné tvrdenie, ktoré možno bez ujmy na všeobecnosti predpokladať zo symetrie, body nestrhávajte. Plný počet bodov dajte aj pri zabudnutí prípadu $|\measuredangle BAC| = 90°$.

---

3. *Ukážte, že počet spôsobov, ktorými možno vydláždiť útvar dominovými kockami, sa*

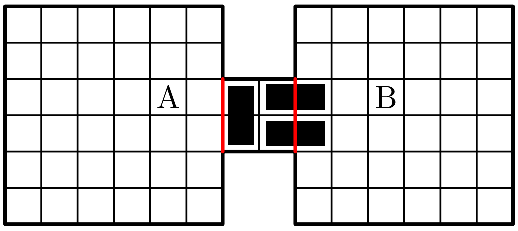


Obr. 3

dá vyjadriť ako súčet dvoch druhých mocnín prirodzených čísel. (*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Ak by niektorá z oboch červených úsečiek na obr. 4 pretínala práve jednu dominovú kocku, zvýšilo by nám v štvorci 6×6, ktorý táto úsečka z daného útvaru vyčleňuje, vydláždiť 35 políčok. To je ale samozrejme nemožné, keďže 35 je nepárne číslo.

Platí teda, že ktorákoľvek z oboch červených úsečiek buď nepretína žiadnu dominovú kocku (prípad A ako pri ľavej úsečke na obr. 4), alebo pretína práve dve dominové kocky (prípad B ako pri pravej úsečke na obr. 4).



Obr. 4

Ak pri niektorej červenej úsečke nastane prípad A, zvýši v príslušnom štvorci $6 \times \times 6$ na vydláždenie všetkých 36 políčok. Označme a počet spôsobov, ktorými to možno spraviť. Podobne ak nastane prípad B, ostáva v príslušnom štvorci vydláždiť oblasť majúcu 34 políčok. Príslušný počet spôsobov označme b. (Zrejme platí $a > b$.) Teraz rozlíšime tri prípady.

(a) Dláždení, v ktorých nastane pri oboch červených úsečkách prípad B, je presne b^2.

(b) Ak nastane raz prípad A a raz prípad B, je dláždenie oblasti medzi úsečkami určené jednoznačne podľa toho, či prípad A nastal vľavo alebo vpravo. Dláždení tohto typu je teda $2ab$.

(c) V poslednom prípade „A-A" je možné zvyšný štvorec 2×2 medzi červenými úsečkami vydláždiť dvoma spôsobmi, a výsledných dláždení je teda $2a^2$.

Celkový počet dláždení je $b^2 + 2ab + 2a^2$, čo možno upraviť na želaný súčet dvoch štvorcov ako $(a + b)^2 + a^2$. Tým je úloha vyriešená.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Tie rozdeľte medzi jednotlivé časti úlohy nasledovne:

- ▷ [2 body] Dôkaz, že hľadané dláždenia sú štyroch druhov A-A, B-B, A-B, B-A alebo ekvivalentného tvrdenia.
- ▷ [1 bod] Označenie počtov čiastočných dláždení a, b (alebo iných dvoch počtov, napríklad $a - b$ a b).
- ▷ [2 body] Určenie počtu dláždení ako $b^2 + 2ab + 2a^2$ (alebo ekvivalentný výraz v prípade iného označenia).
- ▷ [1 bod] Úprava výrazu na súčet štvorcov.

Za snahy o priamy výpočet počtu dláždení dajte body iba v prípade správneho výsledku aj správnej argumentácie. Vzhľadom na to, že už hodnoty $a = 6\,728$ a $b = 2\,900$ sa nedajú ľahko nájsť bez pomoci počítača, také riešenia neočakávame. Ak sa to predsa len podarí, dajte 2 body za správny výpočet každej z hodnôt a, b.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019