69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020

Riešenia úloh školského kola kategórie B

---

1. *Nájdite všetky celé čísla a, pre ktoré má rovnica*

$$a(x^2 + x) = 3(x^2 + 1)$$

aspoň jeden celočíselný koreň. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ak má rovnica celočíselný koreň m, je číslo $3(m^2+1)$ rovné $am(m+1)$, takže je deliteľné číslom m, ktoré je zrejme rôzne od nuly. Vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel m a $m^2 + 1$ z toho vyplýva, že číslo m je deliteľom čísla 3, takže $m \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Do pôvodnej rovnice postupne dosadíme za x všetky štyri hodnoty m a zistíme tak, že celočíselné a vyjde pre práve dve z nich. Je to jednak $x = -3$, ktorému zodpovedá $a = 5$, jednak $x = 1$, pre ktoré $a = 3$. (Pre $x = -1$ vychádza $0 \cdot a = 6$, pre $x = 3$ rovnica $12a = 30$ s neceločíselným koreňom a.)

Odpoveď. Rovnica má celočíselný koreň pre $a = 3$ alebo $a = 5$.

Poznámka. Rovnosť pre celočíselný koreň m by sme mohli tiež upraviť na tvar

$$am(m + 1) = 3(m^2 + 1) = 3(m - 1)(m + 1) + 6,$$

odkiaľ vidíme, že číslo $m + 1$ delí číslo 6. Táto úvaha vedie k ôsmim možnostiam pre číslo m s podobnou diskusiou.

Iné riešenie. Danú rovnicu upravíme na štandardný tvar

$$(a - 3)x^2 + ax - 3 = 0. \tag{1}$$

Pre $a = 3$ sa jedná o lineárnu rovnicu s celočíselným koreňom $x = 1$, takže $a = 3$ vyhovuje. Pre celé $a \neq 3$ je rovnica kvadratická a jej celočíselný diskriminant

$$D = a^2 + 12(a - 3) = (a + 6)^2 - 72$$

musí byť druhou mocninou celého čísla (už aj v prípade racionálneho koreňa).

Nech $D = n^2$ pre celé nezáporné číslo n. Platí tak

$$n^2 = (a + 6)^2 - 72.$$

Túto rovnicu upravíme na tvar

$$(a + n + 6)(a - n + 6) = (a + 6)^2 - n^2 = 72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Oba celočíselné činitele $a - n + 6$ a $a + n + 6$ majú zrejme rovnakú paritu (ich súčet je párny), takže podľa ich súčinu 72 to musia byť dve párne čísla, pre ktoré navyše platí $a - n + 6 \leqq a + n + 6$. Nastanú tak pre ne iba možnosti uvedené v nasledujúcej tabuľke, v ktorej súčasne uvádzame aj zodpovedajúce hodnoty čísel a, n a zodpovedajúce korene kvadratickej rovnice (1):

$a-n+6$ $a+n+6$	-36 -2	-18 -4	-12 -6	2 36	4 18	6 12
a n	-25 17	-17 -7	-15 -3	13 17	5 7	3 3
korene (1)	$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{5}, -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}, \frac{1}{5}$	$-3, \frac{1}{2}$	rovnica nie je kvadratická

Vidíme, že okrem už diskutovaného prípadu $a = 3$ má daná rovnica celočíselný koreň iba v prípade $a = 5$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho záverečný 1 bod za zhŕňajúcu odpoveď $a \in \{3, 5\}$. Predchádzajúcich 5 bodov v závislosti od zvoleného postupu prideľujte nasledovne.

Pri postupe podľa prvého riešenia dajte 2 body za dôkaz, že výraz len v premennej m delí určené celé číslo (napr. $m \mid 3$, $m+1 \mid 6$, $m(m+1) \mid 6, \ldots$), 1 bod za uvedenie všetkých možností pre m a ďalej nanajvýš 2 body za správne dopočítanie prislúchajúcich hodnôt a.

Pri postupe podľa druhého riešenia dajte 1 bod za diskusiu lineárnej rovnice v prípade $a = 3$, 1 bod za tvrdenie, že diskriminant kvadratickej rovnice musí byť kvadrátom celého čísla, 1 bod za nájdenie všetkých možností pre D ($D \in \{3^2, 7^2, 17^2\}$), 1 bod za zdôvodnenie, prečo iné hodnoty D nevyhovujú a 1 bod za vylúčenie všetkých možností pre a okrem $a = 5$.

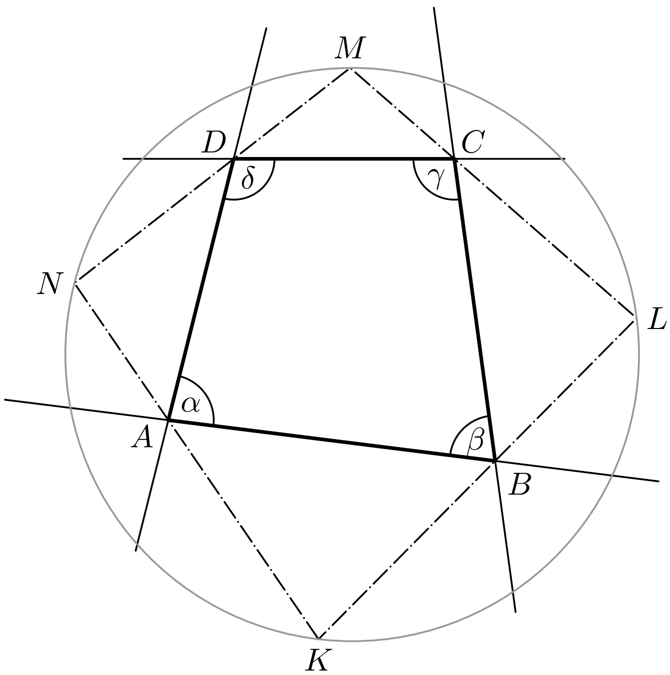
Pozor! Riešiteľ môže získať čiastkové body iba za jeden postup, čiastkové body podľa rôznych postupov sa nesčítajú. Len za uhádnutie oboch hodnôt $a \in \{3, 5\}$ dajte 1 bod, ak je uhádnutá iba jedna hodnota, žiadny bod neprideľujte.

---

2. *Dokážte, že stredy kružníc zvonka pripísaných jednotlivým stranám ľubovoľného konvexného štvoruholníka ležia na jednej kružnici.*

(Kružnicou pripísanou napríklad strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$ rozumieme kružnicu, ktorá sa dotýka strany AB a polpriamok opačných k polpriamkam AD a BC.) *(Jaroslav Švrček, Pavel Calábek)*

Riešenie. Posudzované stredy kružníc zvonka pripísaných stranám daného štvoruhol-



Obr. 1

níka $ABCD$ označíme K, L, M, N podľa obr. 1. Našou úlohou je dokázať, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový. Využijeme na to zvyčajným spôsobom označené vnútorné uhly α, β, γ, δ počiatočného štvoruholníka $ABCD$. Bod K je priesečníkom osí vonkajších uhlov tohto štvoruholníka pri vrcholoch A, B. Preto

$$|\measuredangle BAK| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad |\measuredangle ABK| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta.$$

Z toho pre veľkosť tretieho vnútorného uhla trojuholníka ABK vyplýva

$$|\measuredangle AKB| = 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Podobne pre stred M kružnice zvonka pripísanej strane CD štvoruholníka platí

$$|\measuredangle CMD| = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta).$$

Súčet veľkostí vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch K a M štvoruholníka $KLMN$ je tak

$$|\measuredangle AKB| + |\measuredangle CMD| = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \tfrac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ,$$

čo je nutná a postačujúca podmienka na to, aby štvoruholník $KLMN$ bol tetivový. Tým je dôkaz ukončený.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 5 bodov za dôkaz, že súčet dvoch protiľahlých uhlov štvoruholníka $KLMN$ je 180°, a 1 bod za následné konštatovanie, že (práve) také štvoruholníky sú tetivové (namiesto toho je možné uviesť aj potrebné poznatky o oblúkoch ako ekvigonálach).

Hodnotenie dôkazu 5 bodmi rozdeľte takto: 1 bod za poznatok, že stredy kružníc zvonka pripísaných ležia na osiach vonkajších uhlov štvoruholníka $ABCD$, 2 body za potrebné vyjadrenia štyroch uhlov pri obvode $ABCD$ ako napr. uhla BAK pomocou uhla α, 1 bod za vyjadrenie dvoch protiľahlých uhlov v $KLMN$ a 1 bod za ich sčítanie na hodnotu 180°.

Ak riešiteľ ukáže, že tvrdenie platí pre štvoruholníky $ABCD$ konkrétneho tvaru, tak v prípade štvorcov body nedávajte, v prípade kosoštvorcov a obdĺžnikov nanajvýš 1 bod, vo všeobecnejších prípadoch (rovnobežníky a lichobežníky) nanajvýš 2 body; tieto body sa nesčítajú.

---

3. *Určte najväčšie prirodzené číslo k, pre ktoré možno na šachovnicu 8×8 rozmiestniť k veží a k strelcov tak, aby žiadna figúrka neohrozovala inú. (Strelec ohrozuje ľubovoľné políčko diagonály a veža ľubovoľné políčko riadka aj stĺpca, na ktorých stoja.)*

(*Josef Tkadlec*)

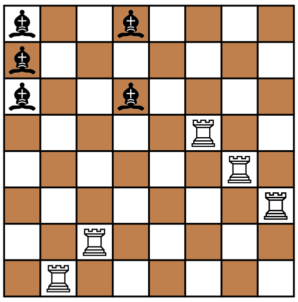
Riešenie. Uvažujme ľubovoľné vyhovujúce rozmiestnenie k veží a k strelcov. Dokážme, že platí nerovnosť $k \leqq 5$.

Ak je v niektorom riadku (resp. stĺpci) šachovnice umiestnená veža, musí byť jedinou figúrkou tohto riadka (resp. stĺpca). Pre počet k rozmiestnených veží tak nutne platí $k \leqq 8$ a navyše je nimi neobsadených celkom $8-k$ riadkov a $8-k$ stĺpcov šachovnice. Strelci v počte k tak môžu stáť iba na niektorom z $(8-k)^2$ políčok, v ktorých sa tieto riadky a stĺpce šachovnice pretínajú. Preto musí platiť nerovnosť

$$k \leqq (8-k)^2.$$

Z toho už vyplýva $k \leqq 5$, lebo odvodená nerovnosť neplatí pre žiadne $k \in \{6, 7, 8\}$, ako sa ľahko presvedčíme dosadením.

Ako vidíme z nasledujúceho obrázka, 5 veží a 5 strelcov sa dá rozmiestniť na šachovnicu tak, aby sa navzájom neohrozovali, preto najväčšie možné k danej vlastnosti je $k = 5$.



Obr. 2

Poznámka. Odvodenie nerovnosti $k \leqq 5$ možno podať stručnejšie takto: najskôr vylúčime rovnako ako v podanom riešení hodnotu $k = 6$ (6 strelcov by muselo stáť na 4 políčkach, ktoré ležia v dvoch riadkoch a dvoch stĺpcoch neobsadených 6 vežami) a potom konštatujeme, že ak by existovalo vyhovujúce rozmiestnenie pre $k > 6$, odobratím ľubovoľných $k - 6$ veží a $k - 6$ strelcov by sme dostali vyhovujúce rozmiestnenie pre $k = 6$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho 1 bod za vylúčenie možností $k > 6$ a 2 body za vylúčenie možnosti $k = 6$. Napokon 3 bodmi ohodnoťte konštrukciu príkladu správneho rozostavenia pre $k = 5$. Za konštatovanie, že k nájdenému príkladu pre $k = 5$ už sa nedá žiadna ďalšia veža pridať, ale ďalšie body nedávajte – na úplné vyriešenie úlohy by bolo potrebné takto otestovať všetky vyhovujúce rozmiestnenia pre $k = 5$. Ak je uvedený správny príklad rozostavenia iba pre $k = 4$, dajte 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020