69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020

Riešenia úloh školského kola kategórie C

1. *Určte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí*

$$n + s(n) = 2\,019,$$

pričom $s(n)$ označuje ciferný súčet čísla n. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Pokúsme sa najskôr vydedukovať nejaký odhad hodnoty čísla n, ktoré by mohlo spĺňať zadanú rovnicu. Na jej ľavej strane máme súčet dvoch prirodzených čísel n a $s(n)$, a preto obe musia byť menšie ako $2\,019$. Presnejšie, hodnota hľadaného čísla $n = 2\,019 - s(n)$ bude nanajvýš $2\,018$, keďže $s(n)$ je prirodzené číslo. Potom vieme, že ciferný súčet čísla $n \leqq 2\,018$ je nanajvýš $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, a preto samotné číslo n musí byť niekde medzi $2\,018$ a $2\,019 - 28 = 1\,991$.

Teraz stačí vyskúšať, pre ktoré z hodnôt $n \in \{2\,018, 2\,017, \dots, 1\,991\}$ vyjde rovnosť $n + s(n) = 2\,019$:

n	$s(n)$	$n + s(n)$
2 018	11	2 029
2 017	10	2 027
2 016	9	2 025
2 015	8	2 023
2 014	7	2 021
2 013	**6**	**2 019**
2 012	5	2 017
2 011	4	2 015
2 010	3	2 013

n	$s(n)$	$n + s(n)$
2 009	11	2 020
2 008	10	2 018
2 007	9	2 016
2 006	8	2 014
2 005	7	2 012
2 004	6	2 010
2 003	5	2 008
2 002	4	2 006
2 001	3	2 004
2 000	2	2 002

n	$s(n)$	$n + s(n)$
1 999	28	2 027
1 998	27	2 025
1 997	26	2 023
1 996	25	2 021
1 995	**24**	**2 019**
1 994	23	2 017
1 993	22	2 015
1 992	21	2 013
1 991	20	2 011

Rozoberanie všetkých 28 možností od $1\,991$ po $2\,018$ (prípadne v inom podobnom intervale) možno rôznymi spôsobmi skrátiť.

Prvým je napríklad pozorovanie, že ak zmenšíme číslo n o jednotku a neprejdeme pritom cez desiatku, zmenší sa hodnota súčtu $n + s(n)$ o 2 (napríklad pre $n = 2\,005$ je $n+s(n) = 2\,012$, pre $n = 2\,004$ vyjde $2\,010$ a pod.). Preto má skúmaný súčet predpísanú hodnotu $2\,019$ pre nanajvýš jedno n v každej desiatke prirodzených čísel, ktoré sa líšia iba na mieste jednotiek, a my ho dokonca môžeme určiť z hodnoty súčtu pre jediné číslo tejto desiatky, napr. pre to, ktoré končí cifrou 9. Podľa predchádzajúcich odhadov tak budeme potrebovať hodnoty $n + s(n)$ iba pre n rovné $2\,019$, $2\,009$ a $1\,999$.

Pre $n = 2\,019$ dostávame $n + s(n) = 2\,031 = 2\,019 + 2 \cdot 6$, a preto medzi číslami od $2\,010$ po $2\,019$ vyhovuje iba číslo $2\,019 - 6 = 2\,013$, ktoré je naozaj jedným z riešení danej úlohy (skúška vďaka vypozorovanému klesaniu súčtu o hodnotu 2 nie je nutná).

Pre $n = 2\,009$ dostávame $n+s(n) = 2\,020$, ktoré je na rozdiel od $2\,019$ párne, a tak medzi číslami od $2\,000$ po $2\,009$ by sme riešenia hľadali márne.

Napokon pre $n = 1\,999$ dostávame $n+s(n) = 2\,027 = 2\,019+2\cdot 4$, a preto vyhovuje iba číslo $1\,999 - 4 = 1\,995$, ktoré je druhým riešením.

Iný spôsob, ako možno eliminovať počet rozoberaných možností, je uvedomiť si, že číslo n dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako jeho ciferný súčet $s(n)$. Ak tento zvyšok označíme ako d, bude číslo $n + s(n) = 2\,019$ po delení tromi dávať zvyšok $d + + d = 2d$. Ciferný súčet čísla $2\,019$ je 12, preto aj číslo $2\,019$ je deliteľné tromi, a preto zvyšok čísla $2d$ po delení tromi je nula, a teda $d = 0$. Inak povedané, hľadané číslo n je deliteľné tromi. V tomto prípade by sme potrebovali preveriť iba 9 čísel medzi $1\,991$ a $2\,018$, ktoré sú deliteľné tromi, t. j. 9 možností $n \in \{2\,016, 2\,013, \dots, 1\,992\}$.

Predchádzajúci spôsob eliminácie možností (využitím zvyšku po delení tromi) môžeme ešte vylepšiť, ak si uvedomíme, že podobne možno použiť aj deliteľnosť deviatimi. Platí, že číslo n a jeho ciferný súčet $s(n)$ dávajú rovnaký zvyšok po delení deviatimi. Označme tento zvyšok r. Číslo $2\,019$ dáva po delení deviatimi zvyšok 3 (t. j. zvyšok po delení čísla $2 + 0 + 1 + 9 = 12$ po delení deviatimi). Z rovnice $2\,019 = n + s(n)$ potom podobne ako v predchádzajúcom odseku vyplýva, že n dáva po delení deviatimi zvyšok 6, keďže jeho dvojnásobok má dávať zvyšok 3. Čísla od $1\,991$ po $2\,018$, ktoré dávajú zvyšok 3 po delení deviatimi, sú iba tri, a to $n \in \{2\,013, 2\,004, 1\,995\}$.

Odpoveď. Úloha má dve riešenia, a to $n = 2\,013$ a $n = 1\,995$.

Iné riešenie. Ak by hľadané číslo n bolo nanajvýš trojciferné, bol by súčet $n + s(n)$ nanajvýš $999+(9+9+9) < 2\,019$. Z druhej strany číslo n nemôže byť päť- a viacciferné, keďže potom by bolo $n+s(n) > 10\,000$. Označme cifry hľadaného štvorciferného čísla n ako a, b, c, d, t. j. $n = 1\,000a + 100b + 10c + d$, pričom $a \neq 0$. Danú rovnicu potom môžeme upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned}(1\,000a + 100b + 10c + d) + (a + b + c + d) &= 2\,019,\\ 1\,001a + 101b + 11c + 2d &= 2\,019. \qquad (1)\end{aligned}$$

Keďže $0 \leqq a, b, c, d \leqq 9$, zrejme $a \leqq 2$, inak by bola ľavá strana rovnice (1) aspoň $3\,003$. Keďže $a \neq 0$, rozoberieme dve možnosti pre $a \in \{1, 2\}$.

▷ $a = 1$:
Potom $101b + 11c + 2d = 2\,019 - 1\,001 = 1\,018$. Pre $b \leqq 8$ by bola ľavá strana nanajvýš $101 \cdot 8 + 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 925 < 1\,018$, preto $b = 9$, čo po dosadení dáva $11c+2d = 1\,018-909 = 109$. Ďalej ak by bolo $c \leqq 8$, bola by ľavá strana nanajvýš $88 + 18 = 106 < 109$, preto môže byť jedine $c = 9$, pre ktoré dopočítame $d = = (109 - 99)/2 = 5$. Pre $a = 1$ dostávame jediné riešenie $n = 1\,995$.

▷ $a = 2$:
Potom $101b + 11c + 2d = 2\,019 - 2\,002 = 17$. Zrejme $b = 0$, teda $11c + 2d = 17$ a $c \leqq 1$. Keďže pravá strana je nepárna, musí byť aj c nepárne (tým sme vylúčili $c = 0$), teda $c = 1$, pre ktoré dopočítame $d = (17-11)/2 = 3$. Pre $a = 2$ dostávame tiež jediné riešenie $n = 2\,013$.

Odpoveď. Úloha má dve riešenia $n = 2\,013$ a $n = 1\,995$.

Ak riešiteľ postupuje podľa prvého riešenia a ohraničí množinu hodnôt n zdola aj zhora tak, že ostane len vyskúšať nanajvýš 30 možností, ale nenájde obe správne riešenia, dajte 4 body (po 2 bodoch za odhad čísla n zhora aj zdola). Zvyšné 2 body rozdeľte po 1 bode za každé nájdené správne číslo n.

Ak riešiteľ postupuje podľa druhého riešenia, dajte 1 bod za zostavenie rovnice $1\,001a + 101b + + 11c + 2d = 2\,019$ a ďalší bod, ak sa riešiteľ dostane ku skúmaniu $a \in \{1, 2\}$. Ďalšie dva body dajte, ak riešiteľ ďalej systematicky vylučuje rôzne hodnoty b, c, d a posledné 2 body dajte iba v prípade, že úlohu správne dokončí a nájde obe čísla $1\,995$ aj $2\,013$.

Akokoľvek riešiteľ postupuje, ak nájde iba jedno z riešení bez toho, že by vylúčil všetky ostatné možnosti, dajte 1 bod, a ak uhádne obe riešenia $1\,995$ aj $2\,013$ bez ďalšej analýzy, dajte 2 body.

2. *Tabuľka 3×3 je vyplnená navzájom rôznymi prirodzenými číslami tak, že v každom riadku aj stĺpci je súčet krajných čísel rovný číslu napísanému medzi nimi. Zistite, aké najmenšie číslo môže byť napísané uprostred tabuľky.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme čísla v rohoch tabuľky a, b, c, d (zľava doprava, zhora nadol). Týmito štyrmi číslami sú jednoznačne určené všetky ostatné čísla tabuľky, pretože postupne možno dopočítať čísla medzi nimi a nakoniec aj číslo $a+b+c+d$ uprostred tabuľky.

a		b
c		d

$\Longrightarrow$

a	$a+b$	b
$a+c$		$b+d$
c	$c+d$	d

$\Longrightarrow$

a	$a+b$	b
$a+c$	$a+b+c+d$	$b+d$
c	$c+d$	d

Pre hodnoty $a = 1$, $b = 3$, $c = 6$ a $d = 2$ dostaneme tabuľku rôznych čísel

1	4	3
7	12	5
6	8	2

s číslom $a + b + c + d = 12$ uprostred.

Teraz ukážeme, že uprostred tabuľky nemôže byť menšie číslo ako 12. Menšie číslo ako 12 sa dá ako súčet štyroch rôznych prirodzených čísel dostať iba dvoma spôsobmi: ako $1 + 2 + 3 + 4$ alebo $1 + 2 + 3 + 5$.

V oboch prípadoch sa medzi číslami vpísanými do rohov tabuľky nachádzajú čísla 1, 2 aj 3. Vyskúšajme, či ich môžeme vpísať do rohov tabuľky tak, aby sme ju vedeli celú vyplniť požadovaným spôsobom.

Čísla 1 a 2 nesmú byť napísané v tom istom riadku či stĺpci, pretože by potom medzi nimi bolo napísané číslo 3 ako ich súčet, a my potrebujeme mať číslo 3 v niektorom rohu tabuľky. Preto musia byť čísla 1 a 2 v protiľahlých rohoch tabuľky. Pre číslo 3 máme už iba dve možné rohové políčka tabuľky, a nech už ho vpíšeme do ktoréhokoľvek z nich, budeme musieť medzi čísla 3 a 1 vpísať číslo 4 a medzi čísla 3 a 2 číslo 5, teda nebudeme môcť mať v poslednom rohu ani číslo 4, ani číslo 5. Do rohov tabuľky preto nedokážeme napísať ani čísla 1, 2, 3, 4, ani 1, 2, 3, 5, a preto číslo $a+b+c+d$ uprostred tabuľky spĺňajúce podmienky zadania má vždy hodnotu aspoň 12.

Iné riešenie. Označme čísla v rohoch tabuľky rovnako ako v predošlom riešení a doplnením ostatných čísel v tabuľke vidíme, že súčet S všetkých čísel v tabuľke je

$$\begin{aligned} S &= a + (a+b) + b + (a+c) + (a+b+c+d) + (b+d) + c + (c+d) + d = \\ &= 4(a+b+c+d), \end{aligned}$$

čo je číslo deliteľné štyrmi. Presnejšie, je to štvornásobok čísla napísaného uprostred tabuľky. Nájsť najmenšie možné číslo napísané uprostred tabuľky je teda to isté ako nájsť štvrtinu najmenšieho možného súčtu S všetkých čísel napísaných v tabuľke.

Každé z deviatich čísel v tabuľke je prirodzené a napísané nanajvýš raz, preto súčet S všetkých čísel v tabuľke bude aspoň $S \geqq 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, čo je súčet deviatich najmenších prirodzených čísel. Už vieme, že tento súčet S musí byť deliteľný štyrmi, a preto najmenší súčet všetkých čísel v tabuľke musí byť aspoň 48 (najmenšie číslo deliteľné štyrmi, ktoré spĺňa podmienku $S \geqq 45$). Potom ale najmenšia možná hodnota čísla uprostred tabuľky je $S/4 = 48/4 = 12$.[1] Vyhovujúcu tabuľku nájdeme skúšaním a môže to byť napríklad tá z prvého riešenia.

Poznámka. Počet všetkých vyhovujúcich tabuliek s číslom 12 uprostred je 8. Číslo 12 sa dá napísať ako súčet štyroch rôznych prirodzených čísel iba dvoma spôsobmi ako $6+3+2+1$ a $5+4+2+1$. Dá sa pritom overiť, že druhá možnosť nevedie k tabuľke s rôznymi číslami a že prvá možnosť vedie k správnemu vyplneniu tabuľky, len keď sú čísla 1 a 2 v protiľahlých rohoch. Tým pádom dokážeme spočítať počet vyhovujúcich tabuliek takto: Pre číslo 1 máme štyri možnosti, kam ho umiestniť, a potom už je poloha čísla 2 jednoznačne určená. Následne pre číslo 3 máme 2 možnosti, číslo 6 je v poslednom voľnom rohu tabuľky, a zvyšné čísla sú samozrejme určené tiež jednoznačne. Dokopy tak existuje 8 možných príkladov pre tabuľku s číslom 12 uprostred (každý sa pritom dá dostať z ktoréhokoľvek iného postupnými výmenami krajných riadkov resp. stĺpcov).

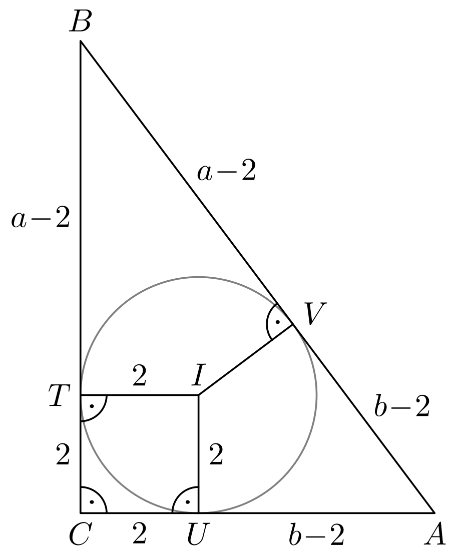
Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 2 body za príklad tabuľky s číslom 12 uprostred a 4 body za dôkaz, že číslo uprostred tabuľky musí byť aspoň 12. Slabšie výsledky oceňte takto: 1 bod za príklad tabuľky s číslom 13 uprostred; za zdôvodnenie, že číslo uprostred musí byť aspoň 10, resp. 11, dajte 2, resp. 3 body.

Ak riešiteľ postupuje pri odhade čísla uprostred podľa druhého riešenia, dajte 2 body za tvrdenie, že súčet všetkých čísel v tabuľke je štvornásobkom čísla uprostred. Ďalšie 2 body za ukázanie, že súčet musí byť aspoň 48, a teda najmenšie číslo uprostred je 12 (inak možno získať 4 body aj za postup z poznámky pod čiarou).

---

3. *Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán, ktorých kružnica vpísaná má polomer 2.* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Hľadaný pravouhlý trojuholník označme ABC tak, aby pravý uhol bol pri vrchole C, dĺžky jeho strán označme štandardne ako $|BC| = a$, $|AC| = b$ a $|AB| = c$.



Obr. 1

[1] Tento odhad čísla $a+b+c+d$ uprostred tabuľky možno získať aj bez úvahy o celkovom súčte: Súčet ôsmich ostatných čísel, ktorý je aspoň $1+2+\ldots+8 = 36$, je rovný $3(a+b+c+d)$, odkiaľ $a+b+c+d \geqq 12$.

Navyše označme I stred jeho vpísanej kružnice a T, U a V postupne jej body dotyku so stranami BC, AC a AB (obr. 1).

Štvoruholník $CUIT$ má vnútorné uhly pri vrcholoch C, T aj U pravé a navyše zo zadania vyplýva, že $|IT| = |IU| = 2$, preto je to štvorec. Z rovnosti $|CT| = 2$ potom máme $|BT| = a - 2$ a z rovnosti úsekov dotyčníc z vrcholu B ku vpísanej kružnici máme $|BV| = |BT| = a - 2$. Podobne získame rovnosti $|AV| = |AU| = b - 2$. Veľkosť prepony AB tak môžeme vyjadriť jednak ako $|BV| + |AV| = (a - 2) + (b - - 2) = a + b - 4$, jednak z Pytagorovej vety ako $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Z toho dostávame rovnicu, ktorú umocníme a postupne upravíme:

$$
\begin{aligned}
|AB| = a + b - 4 &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \Big|^2 &(1)\\
(a + b - 4)^2 &= a^2 + b^2,\\
a^2 + b^2 + 2ab - 8a - 8b + 16 &= a^2 + b^2,\\
ab - 4a - 4b + 8 &= 0,\\
(a - 4)(b - 4) &= 8. &(2)
\end{aligned}
$$

Číslo 8 sa dá rozložiť na súčin dvoch celých čísel ako

$$8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = (-1) \cdot (-8) = (-2) \cdot (-4).$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a \geqq b$, čiže $a - 4 \geqq b - 4$. Potom máme nasledujúce štyri možnosti (hľadáme ale iba kladné riešenia, pretože sa jedná o dĺžky strán trojuholníka):[2]

- ▷ $a - 4 = 8$ a $b - 4 = 1$, odkiaľ $a = 12$, $b = 5$, $c = a + b - 4 = 13$;
- ▷ $a - 4 = 4$ a $b - 4 = 2$, odkiaľ $a = 8$, $b = 6$, $c = a + b - 4 = 10$;
- ▷ $a - 1 = -1$ a $b - 4 = -8$, odkiaľ $a = 0$, $b = 4$, čo úlohe nevyhovuje;
- ▷ $a - 1 = -2$ a $b - 4 = -4$, odkiaľ $a = -1$, $b = 0$, čo úlohe nevyhovuje.

Nakoniec ostáva preveriť, že vpísaná kružnica oboch pravouhlých trojuholníkov s dĺžkami strán 5, 12, 13 a 6, 8, 10 má naozaj polomer dĺžky 2. Ak napíšeme jej polomer r do obr. 1 všade namiesto čísla 2, dostaneme rovnosť $c = a + b - 2r$, z ktorej vyplýva vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, podľa ktorého pre obe trojice $(5, 12, 13)$ a $(6, 8, 10)$ naozaj vyjde $r = 2$.

Odpoveď. Hľadaný trojuholník má strany dĺžok 5, 12, 13 alebo 6, 8, 10.

Iné riešenie. Použijeme rovnaké označenie strán trojuholníka ako v predošlom riešení, t. j. a, b budú odvesny a c prepona hľadaného trojuholníka ABC s obsahom S. Obsah každého trojuholníka možno vyjadriť vzorcom $S = s \cdot r$, pričom s označuje polovicu jeho obvodu a r polomer jeho vpísanej kružnice. Navyše obsah pravouhlého trojuholníka možno vyjadriť aj ako polovicu súčinu jeho odvesien. Spolu tak dostaneme rovnicu, ktorú s využitím daného polomeru $r = 2$, pytagorejskej rovnosti $c^2 = a^2 + b^2$ a nerovnosti

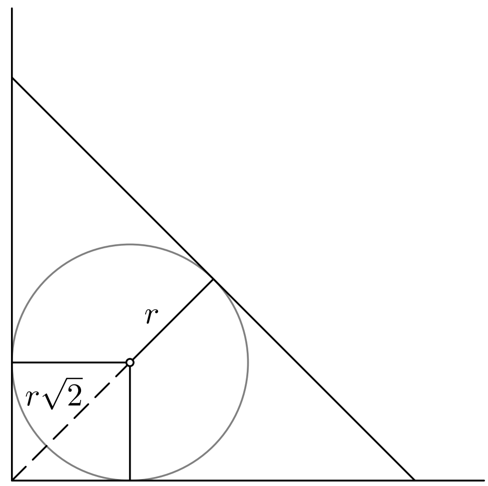
[2] Keďže celá vpísaná kružnica leží vnútri pravouhlého trojuholníka ABC a jej priemer je 4, sú obe jeho odvesny väčšie ako 4, a tak sme si mohli rozoberanie dvoch prípadov ušetriť.

$ab > 0$ upravíme na tvar (2):

$$\begin{aligned}
S = \frac{(a+b+c)\cdot r}{2} &= \frac{ab}{2},\\
(a+b+c)\cdot 2 &= ab,\\
2c &= ab - 2(a+b), \qquad \Big|^2\\
4c^2 &= \left(ab - 2(a+b)\right)^2,\\
4(a^2+b^2) &= a^2b^2 - 4ab(a+b) + 4(a^2+2ab+b^2),\\
0 &= ab(ab - 4(a+b) + 8),\\
0 &= ab - 4a - 4b + 8,\\
8 &= (a-4)(b-4). \qquad (3)
\end{aligned}$$

A ďalej postupujeme ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Ľahko spočítame, že rovnoramenný pravouhlý trojuholník s polomerom kružnice vpísanej $r = 2$ má odvesny dĺžky $(r + r\sqrt{2})\cdot\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} < 7$ (lebo $(2\sqrt{2})^2 = 8 < 9 = (7-4)^2$).



Obr. 2

Akýkoľvek pravouhlý trojuholník s $r = 2$ musí mať teda jednu odvesnu kratšiu ako 7. Na druhej strane obe odvesny musia byť určite dlhšie ako priemer kružnice vpísanej, teda 4. Pri označení ako vyššie tak pre dĺžku kratšej odvesny máme dve možnosti $a = 5$, $a = 6$, pričom pre každú z nich existuje jednoznačne určená (reálna) dĺžka druhej odvesny b, pre ktorú vyjde $r = 2$. Tipneme si celočíselné trojuholníky $(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10)\}$ a dosadením do vzorca $r = ab/(a + b + c)$ alebo $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ sa presvedčíme, že oba spĺňajú $r = 2$, a sú teda riešením.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Ak riešiteľ postupuje geometrickým spôsobom opísaným v prvom riešení, dajte 1 bod za napísanie rovnosti $|CT| = |CU| = 2$. Druhý bod dajte za vyjadrenie dĺžok strán $|BT| = |BV| = a - 2$ a $|AU| = |AV| = b - 2$. Tretí bod za rovnosť (1) a štvrtý bod za jej úpravu na tvar (2). Zvyšné 2 body pripadajú na jej vyriešenie (po bode za každé riešenie). Absenciu skúšky polomeru opísanú v závere prvého riešenia nepenalizujte.

Ak riešiteľ postupuje algebraickým spôsobom opísaným v druhom riešení, dajte po 1 bode za uvedenie každého z dvoch vzorcov pre výpočet obsahu trojuholníka a za vytvorenie rovnosti medzi nimi s dosadením $r = 2$ dajte tretí bod. Štvrtý bod dajte, ak sa riešiteľ dostane až k rovnici (3). Zvyšné 2 body pripadajú na jej vyriešenie podobne ako v prvom riešení.

Ak sa riešiteľovi podarilo uhádnuť strany hľadaného pravouhlého trojuholníka (bez zdôvodnenia, že kratšia odvesna je kratšia ako 7 a dlhšia ako 4) a dopočítať k nim nejakým spôsobom veľkosť polomeru vpísanej kružnice (napríklad zo vzťahu $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$), za každé z dvoch riešení $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$ dajte po 1 bode.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Tomáš Jurík, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020