69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z5

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

---

1. *Záhradník pán Malina predával jahody. V posledných deviatich debničkách mal postupne 28, 51, 135, 67, 123, 29, 56, 38 a 79 sadeníc jahôd. Predával celé debničky, žiadne sadenice z debničiek nevyťahoval. Záhradník chcel rozpredať debničky trom zákazníkom tak, aby mu nič neostalo a aby všetci títo zákazníci mali rovnaký počet sadeníc. Ako to mohol urobiť? Uveďte dve možnosti.* (*Libuše Hozová*)

Riešenie. Súčet všetkých sadeníc bol 606. Teda každý z troch zákazníkov mal dostať 202 sadeníc.

Počty sadeníc v jednotlivých debničkách možno rozdeliť na tri skupiny so súčtom 202 niekoľkými spôsobmi:

a)	135+67,	123+79,	56+51+38+29+28,
b)	135+38+29,	123+51+28,	79+67+56,
c)	135+38+29,	123+79,	67+56+51+28,
d)	135+67,	123+51+28,	79+56+38+29.

Tieto rozdelenia zodpovedajú možnostiam, ako mohol záhradník rozpredať svoje debničky.

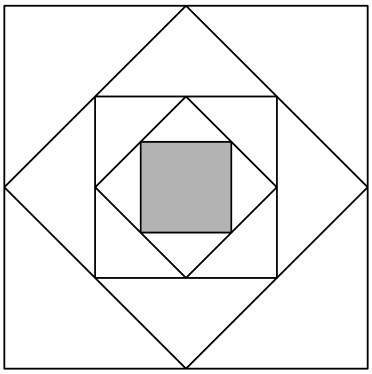
Návrh hodnotenia. 2 body za celkový súčet a zistenie, že každý mal dostať 202 sadeníc; po 2 bodoch za každé z dvoch správnych rozdelení.

Poznámky. Pri ručnom skúšaní možností je vhodné začínať s väčšími číslami.

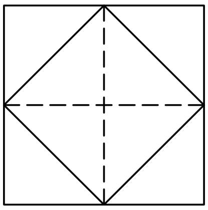
Uvedené čísla je možné rozdeliť na tri skupiny s rovnakým súčtom bez toho, aby bolo nutné vopred určovať celkový súčet. Tento postreh zohľadnite pri hodnotení.

V každom z uvedených prípadov je možné uvažovať šesť možných priradení troch skupín debničiek trom zákazníkom. Riešenie založené na tejto myšlienke považujte tiež za správne.

2. *Do štvorca sú vpísané menšie štvorce, a to vždy tak, že vrcholy menšieho štvorca sú v stredoch strán väčšieho štvorca, pozri obrázok. Sivo vyfarbený štvorec má obsah 1 cm^2. Určte obvod najväčšieho štvorca.* (Eva Semerádová)



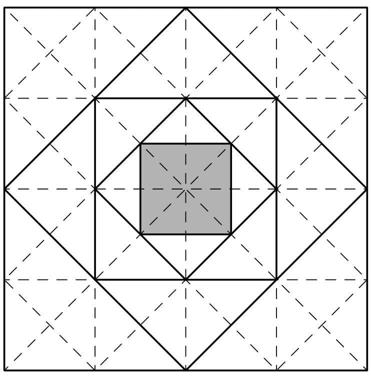
Riešenie. Pre dvojicu štvorcov, z ktorých jeden má vrcholy v stredoch strán druhého, platí, že väčší štvorec má dvojnásobný obsah vzhľadom k menšiemu štvorcu:



Menší štvorec je totiž svojimi uhlopriečkami rozdelený na štyri zhodné trojuholníky a tieto trojuholníky sú zhodné so štyrmi trojuholníkmi, ktoré patria do väčšieho, ale nie do menšieho štvorca.

Štvorce v zadaní majú postupne (od najmenšieho) obsahy 1, 2, 4, 8 a 16 cm^2. Teda strana najväčšieho štvorca meria 4 cm a jeho obvod je 16 cm.

Iné riešenie. S odkazom na ten istý poznatok ako v predchádzajúcom riešení je možné štvorce v zadaní rozdeliť na navzájom zhodné časti takto:



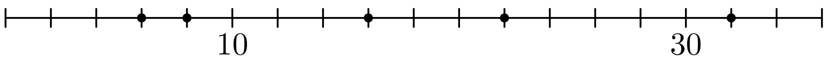
Z toho vyplýva, že strana najväčšieho štvorca má štvornásobnú dĺžku vzhľadom k najmenšiemu, t. j. 4 cm. Teda obvod najväčšieho štvorca je 16 cm.

Návrh hodnotenia. 3 body za určenie vzťahov medzi štvorcami; 3 body za určenie obvodu najväčšieho štvorca.

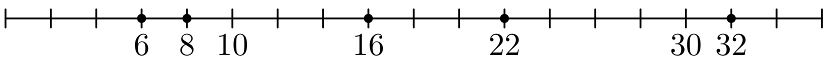
3. *Na obrázku je číselná os s vyznačenými číslami 10 a 30 a ďalšími bezmennými bodmi predstavujúcimi celé čísla. Janko si na tejto osi bodkami vyznačil svoje obľúbené číslo a ďalšie štyri čísla, o ktorých vieme, že*

- *jedno je polovicou Jankovho čísla,*
- *jedno je o 6 väčšie ako Jankovo číslo,*
- *jedno je o 10 menšie ako Jankovo číslo,*
- *jedno je dvakrát väčšie ako Jankovo číslo.*

Zistite, ktoré číslo je Jankovo obľúbené. (*Svetlana Bednářová*)



Riešenie. Medzi číslami 10 a 30 je 10 dielikov. Teda jeden dielik má dĺžku 2 a bodkami vyznačené čísla sú postupne 6, 8, 16, 22 a 32.



Zo zadania vyplýva, že medzi týmito piatimi číslami sú dve menšie a dve väčšie ako Jankovo obľúbené číslo. Teda Jankovo číslo musí byť 16:

- 8 je polovicou 16,
- 22 je o 6 väčšie ako 16,
- 6 je o 10 menšie ako 16,
- 32 je dvakrát väčšie ako 16.

Návrh hodnotenia. 3 body za určenie čísel vyznačených bodkami; 3 body za určenie Jankovho obľúbeného čísla (z toho 1 bod za kontrolu všetkých podmienok zo zadania).

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020