2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

---

1. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} ax + y &= 2,\\ x - y &= 2a,\\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y a reálnym parametrom a. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Sčítaním druhej a tretej rovnice dostaneme $2x = 2a + 1$, odčítaním druhej rovnice od tretej $2y = -2a + 1$. Odtiaľ vyjadríme

$$x = a + \tfrac{1}{2}, \quad y = -a + \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

a dosadíme do prvej rovnice pôvodnej sústavy. Po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$a^2 - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{2} = 0, \tag{2}$$

ktorá má korene $a_1 = -1$ a $a_2 = \frac{3}{2}$. Pre každú z týchto dvoch (jediných možných) hodnôt parametra a už ľahko stanovíme neznáme x a y dosadením do vzťahov (1).

Daná sústava rovníc má riešenie iba pre dve hodnoty parametra a, jednak pre $a = -1$, keď je jej jediným riešením $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, jednak pre $a = \frac{3}{2}$, keď $(x, y) = (2, -1)$.

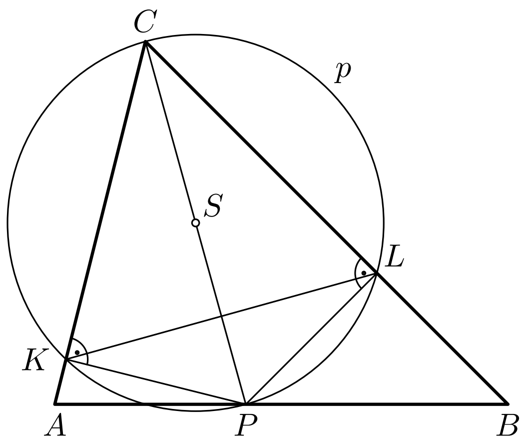
Skúška dosadením je jednoduchá, možno ju vynechať takýmto zdôvodnením: Sústava dvoch rovníc, ktorú sme dostali (a vyriešili) sčítaním a odčítaním druhej a tretej rovnice, je s dvojicou pôvodných rovníc ekvivalentná. Zostávajúca (prvá) rovnica sústavy je potom ekvivalentná s kvadratickou rovnicou (2), ktorej riešením sme našli možné hodnoty parametra a.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za správne vyjadrenie x a y z druhej a tretej rovnice, 2 body za vyriešenie kvadratickej rovnice, ktorá vznikne dosadením týchto hodnôt do prvej rovnice, a po 1 bode za správnu odpoveď a skúšku. Za numerické chyby pri výpočte strhnite najviac 1 bod.

---

2. *Pre vnútorný bod P strany AB ostrouhlého trojuholníka ABC označme K a L päty kolmíc z bodu P na priamky AC a BC. Zostrojte taký bod P, pre ktorý priamka CP rozpoľuje úsečku KL.* (Pavel Calábek)

Riešenie. Označme S stred úsečky CP. Podľa Tálesovej vety ležia body K a L na kružnici p zostrojenej nad priemerom CP. Predpokladajme, že bod P má požadovanú vlastnosť, t. j. že priemer CP rozpoľuje tetivu KL (obr. 1).



Obr. 1

Priemer ľubovoľnej kružnice rozpoľuje každý iný priemer tejto kružnice a tiež všetky tetivy naň kolmé. Žiadnu inú tetivu rozpoľovať nemôže: keď totiž prechádza dvoma *rôznymi* bodmi jej osi súmernosti (stredom tetivy a stredom kružnice), musí byť – rovnako ako táto os – na danú tetivu kolmý.

Tetiva KL však nemôže byť priemerom kružnice p, pretože podľa Tálesovej vety by bol uhol KCL (a teda aj uhol ACB) pravý, čo odporuje zadaniu, preto je tetiva KL na priemer CP kolmá. V tomto prípade sú trojuholníky CKP a CLP súmerne združené podľa priamky CP, odkiaľ už vyplýva, že uhly KCP a LCP sú zhodné. Polpriamka CP je teda osou uhla ACB.

Ak je naopak polpriamka CP osou uhla ACB, zhodujú sa pravouhlé trojuholníky CKP a CLP v spoločnej prepone CP a v dvoch vnútorných uhloch, takže body K a L sú súmerne združené podľa priamky CP. Preto tetiva CP rozpoľuje úsečku KL.

Odpoveď. Existuje práve jeden vnútorný bod strany AB ostrouhlého trojuholníka ABC, pre ktorý úsečka CP rozpoľuje úsečku KL. Je to priesečník osi vnútorného uhla pri jeho vrchole C so stranou AB.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za dôkaz skutočnosti, že bod P musí ležať na osi uhla ACB a 2 body za overenie, že bod ležiaci na osi uhla má požadovanú vlastnosť. Ak riešiteľ bez dôkazu uvedie, že bod P leží na osi uhla ACB, udeľte len 1 bod. Tvrdenie o tetivách, ktoré priemer kružnice rozpoľujú, možno považovať za zrejmé. Naopak, strhnite 1 bod, ak si riešiteľ neuvedomí, že tetiva KL nemôže byť priemerom kružnice p.

---

3. *Číslo nazveme magickým práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako súčet trojciferného čísla m a trojciferného čísla m' zapísaného rovnakými číslicami v opačnom poradí. Niektoré magické čísla možno takto vyjadriť viacerými spôsobmi; napríklad* $1554 = 579 + 975 = 777 + 777$. *Určte všetky magické čísla, ktoré majú takých vyjadrení $m + m'$ čo najviac. (Na poradie m a m' neberieme ohľad.)* (*Aleš Kobza*)

Riešenie. Každé trojciferné číslo má vyjadrenie $m = 100a + 10b + c$, kde a, b, c sú jeho cifry a $a \neq 0$. Trojciferné číslo zapísané rovnakými ciframi v opačnom poradí má potom vyjadrenie $m' = 100c + 10b + a$, $c \neq 0$. Keďže na poradie čísel m a m' neberieme ohľad, pre určitosť predpokladajme, že $m \leqq m'$, čiže $a \leqq c$, pričom $a, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Pre magické číslo x podľa zavedeného označenia cifier platí

$$x = m + m' = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že hodnota x nezávisí ani tak od jednotlivých cifier a, c, ako od ich súčtu $s = a + c$, ktorý môže nadobúdať hodnoty $s \in \{2, 3, \dots, 18\}$. Ďalej už budeme pracovať iba s vyjadrením $x = 101s + 20b$.

Predpokladajme na chvíľu, že sa ako súčet $101s + 20b$ dá niektoré magické číslo x zapísať dvoma rôznymi spôsobmi:

$$x = 101s + 20b = 101s' + 20b'. \tag{1}$$

Z rovnosti $101(s - s') = 20(b - b')$ a nesúdeliteľnosti čísel 101 a 20 vyplýva, že číslo 101 musí deliť číslo $b - b'$. Keďže však b a b' sú cifry, platí $-9 \leqq b - b' \leqq 9$. V tomto intervale nájdeme jediné číslo deliteľné číslom 101, a to číslo 0. Preto $b - b' = 0$, čiže $b = b'$, a teda aj $s = s'$. To však odporuje predpokladu, že číslo x má dve rôzne vyjadrenia tvaru (1). Znamená to, že vo vyjadrení $x = 101s + 20b$ má každé magické číslo x jednoznačne určenú cifru b aj jednoznačne určený súčet s.

Počet spôsobov, ktorými možno magické číslo vyjadriť ako súčet $m + m'$, čiže $101s + 20b$, sa preto rovná počtu spôsobov, ktorými možno vyjadriť zodpovedajúcu hodnotu s ako súčet dvoch cifier a a c, pričom $1 \leqq a \leqq c \leqq 9$. V množine $\{2, 3, \dots, 18\}$ má najväčší počet takých vyjadrení číslo $s = 10$, ktoré sa dá vyjadriť práve piatimi vyhovujúcimi súčtami:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ostatné čísla majú takých vyjadrení menej.

Naozaj: v prípade $s \leqq 9$ z rovnosti $a + c \leqq 9$ a predpokladu $a \leqq c$ vyplýva $a \leqq 4$, takže menšia cifra a nadobúda nanajvýš štyri hodnoty, rovnako ako väčšia cifra c v prípade $s \geqq 11$, keď zo vzťahov $a + c \geqq 11$ a $a \leqq c$ vyplýva $c \geqq 6$.

Najväčším počtom súčtov $m + m'$ (piatimi súčtami) sa dajú vyjadriť magické čísla tvaru $101 \cdot 10 + 20b$, kde $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, jedná sa teda o čísla z desaťprvkovej množiny

$$\{1\,010, 1\,030, 1\,050, \dots, 1\,190\}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za dôkaz skutočnosti, že magické číslo má jediné vyjadrenie súčtom $101s + 20b$. Poznatok, že najväčší počet vyjadrení $s = a + c$ má číslo $s = 10$, je natoľko zrejmý, že môže byť uvedený bez zdôvodnenia. V prípade správneho postupu s numericky chybným vyčíslením niektorých z 10 riešení strhnite najviac 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.