2019/2020
69. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 28. 6. – 1. 7. 2020.*)

1. Na tabuli sú napísané dve kladné celé čísla m a n. V každom kroku jedno z dvoch čísel na tabuli nahradíme buď ich súčtom, alebo súčinom, alebo podielom (ak je celočíselný). V závislosti od čísel m a n určte všetky dvojice, ktoré sa môžu na tabuli po niekoľkých krokoch objaviť. (*Radovan Švarc*)

2. Daný je trojuholník ABC. Vnútri jeho strán AB a AC sú postupne zvolené body X a Y. Označme Z priesečník úsečiek BY a CX. Dokážte nerovnosť

$$[BZX] + [CZY] > 2[XYZ],$$

pričom $[DEF]$ označuje obsah trojuholníka DEF. (*David Hruška, Josef Tkadlec*)

3. Uvažujme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + p &= z, \\ y^2 - 3z + p &= x, \\ z^2 - 3x + p &= y \end{aligned}$$

s reálnym parametrom p.

a) Pre $p \geqq 4$ vyriešte uvažovanú sústavu v obore reálnych čísel.
b) Dokážte, že pre $p \in \langle 1, 4)$ každé reálne riešenie sústavy spĺňa $x = y = z$.

(*Jaroslav Švrček*)

4. Kladné celé čísla a, b spĺňajú rovnosť $b^2 = a^2 + ab + b$. Dokážte, že b je druhou mocninou kladného celého čísla. (*Patrik Bak*)

5. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC, vnútri ktorej je zvolený bod D. Nech E, F sú postupne také body na stranách AB, AC, že platí $|\measuredangle BED| = |\measuredangle DFC| > 90°$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABF a AEC sa pretínajú na priamke AD v bode rôznom od bodu A. (*Patrik Bak, Michal Rolínek*)

6. Pre každé kladné celé číslo k označme $P(k)$ počet všetkých kladných celých $4k$-ciferných čísel, ktoré možno zostaviť z cifier 2, 0 a ktoré sú deliteľné číslom 2 020. Dokážte nerovnosť

$$P(k) \geqq \binom{2k-1}{k}^2$$

a určte všetky k, pre ktoré nastane rovnosť.
(*Poznámka.* Zápis kladného celého čísla nemôže začínať cifrou 0.)