

2019/2020
69. ročník MO

Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A

(Súťaž sa konala 29. 6. – 2. 7. 2020.)

1. Na tabuli sú napísané dve kladné celé čísla m a n . V každom kroku jedno z dvoch čísel na tabuli nahradíme buď ich súčtom, alebo súčinom, alebo podielom (ak je celočíselný). V závislosti od čísel m a n určte všetky dvojice, ktoré sa môžu na tabuli po niekoľkých krokoch objaviť. (Radovan Švarc)

2. Daný je trojuholník ABC . Vnútri jeho strán AB a AC sú postupne zvolené body X a Y . Označme Z priesečník úsečiek BY a CX . Dokážte nerovnosť

$$[BZX] + [CZY] > 2[XYZ],$$

pričom $[DEF]$ označuje obsah trojuholníka DEF . (David Hruška, Josef Tkadlec)

3. Uvažujme sústavu rovníc

$$\begin{aligned}x^2 - 3y + p &= z, \\y^2 - 3z + p &= x, \\z^2 - 3x + p &= y\end{aligned}$$

s reálnym parametrom p .

a) Pre $p \geq 4$ vyriešte uvažovanú sústavu v obore reálnych čísel.

b) Dokážte, že pre $p \in (1, 4)$ každé reálne riešenie sústavy spĺňa $x = y = z$.

(Jaroslav Švrček)

4. Kladné celé čísla a, b spĺňajú rovnosť $b^2 = a^2 + ab + b$. Dokážte, že b je druhou mocninou kladného celého čísla. (Patrik Bak)

5. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC , vnútri ktorej je zvolený bod D . Nech E, F sú postupne také body na stranách AB, AC , že platí $|\angle BED| = |\angle DFC| > 90^\circ$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi ABF a AEC sa pretínajú na priamke AD v bode rôznom od bodu A . (Patrik Bak, Michal Rolínek)

6. Pre každé kladné celé číslo k označme $P(k)$ počet všetkých kladných celých $4k$ -ciferných čísel, ktoré možno zostaviť z cifier 2, 0 a ktoré sú deliteľné číslom 2020. Dokážte nerovnosť

$$P(k) \geq \binom{2k-1}{k}^2$$

a určte všetky k , pre ktoré nastane rovnosť.

(Poznámka. Zápis kladného celého čísla nemôže začínať cifrou 0.) (Jaromír Šimša)