**69. ročník Matematickej olympiády**
**2019/2020** *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

**1.** *Na tabuli sú napísané dve kladné celé čísla $m$ a $n$. V každom kroku jedno z dvoch čísel na tabuli nahradíme buď ich súčtom, alebo súčinom, alebo podielom (ak je celočíselný). V závislosti od čísel $m$ a $n$ určte všetky dvojice, ktoré sa môžu na tabuli po niekoľkých krokoch objaviť.* (Radovan Švarc)

**Riešenie.** Dokážeme, že pre $m = n = 1$ sa na tabuli môže objaviť ľubovoľná dvojica kladných celých čísel a že pre ostatné voľby $m$ a $n$ existuje presne jedna dvojica, ktorá sa nedá dosiahnuť, a to $(1, 1)$.

Je jasné, že obe čísla napísané na tabuli budú vždy kladné a celé. Ďalej si ujasníme, z akých dvojíc je možné jedným krokom získať dvojicu $(1, 1)$. Keďže môžeme jednou operáciou zmeniť iba jedno z čísel, musí byť taká dvojica bez ujmy na všeobecnosti tvaru $(k, 1)$. Jej nasledovníkom môžu byť ale iba dvojice $(k+1, 1)$, $(k, k+1)$ (nahradenie súčtom) a $(k, k)$ (nahradenie súčinom či podielom). Jediné vyhovujúce $k$ je tak $k = 1$. Inými slovami, dvojica $(1, 1)$ sa dá dosiahnuť, iba ak je na tabuli napísaná od začiatku.

Teraz učiníme zásadné pozorovanie. Ak máme dvojicu $(a, b)$, môžeme postupne napísať dvojice

$$(a, b) \to (a, ab) \to (a, ab + a) \to (a, b + 1),$$

a pripočítať tak k $b$ jednotku. Analogicky možno jednotku pripočítať aj k $a$.

Na vyriešenie úlohy stačí dokázať, že z ľubovoľnej dvojice $(a, b)$ možno dosiahnuť dvojice $(1, 2)$ a $(2, 1)$, lebo potom možno pričítaním jednotiek dosiahnuť všetky dvojice prirodzených čísel s výnimkou už diskutovanej dvojice $(1, 1)$.

Uvažujme dvojicu $(a, b)$, v ktorej bez ujmy na všeobecnosti platí $a \geqq b$. Pričítaním jednotiek najskôr získame $(a, 2a)$, odkiaľ po delení dostaneme $(a, 2)$. Teraz nájdeme najmenšie celé číslo $k$, pre ktoré $a < 2^k$ a pričítaním jednotiek prejdeme k $(2^k, 2)$. Ďalej postupným delením vychádza

$$(2^k, 2) \to (2^{k-1}, 2) \to (2^{k-2}, 2) \to \ldots \to (4, 2) \to (2, 2).$$

Teraz možno vydelením vytvoriť obe dvojice $(2, 1)$ a $(1, 2)$, čím je úloha vyriešená.

---

**2.** *Daný je trojuholník $ABC$. Vnútri jeho strán $AB$ a $AC$ sú postupne zvolené body $X$ a $Y$. Označme $Z$ priesečník úsečiek $BY$ a $CX$. Dokážte nerovnosť*

$$[BZX] + [CZY] > 2[XYZ],$$

*pričom $[DEF]$ označuje obsah trojuholníka $DEF$.* (David Hruška, Josef Tkadlec)

**Riešenie.** Do ľavej strany ekvivalentne upravenej nerovnosti

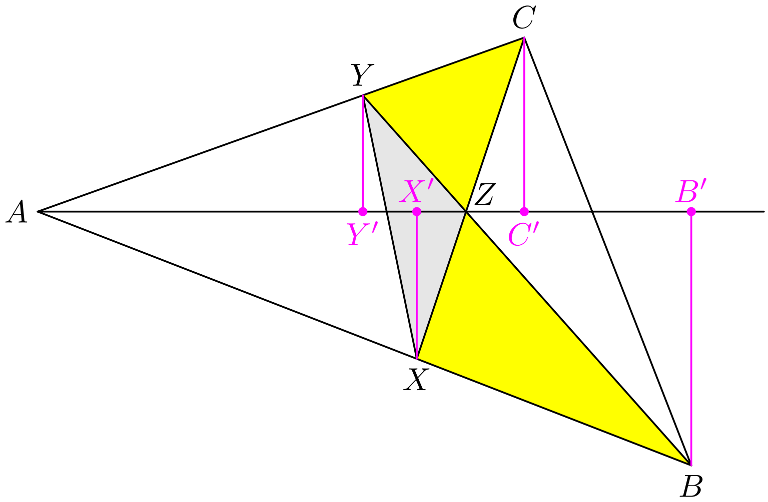
$$\frac{[BZX]}{[XYZ]} + \frac{[CZY]}{[XYZ]} > 2$$

dosadíme vyjadrenia

$$\frac{[BZX]}{[XYZ]} = \frac{|BZ|}{|YZ|} \quad \text{a} \quad \frac{[CZY]}{[XYZ]} = \frac{|CZ|}{|XZ|},$$

ktoré sú obe porovnaním obsahov a základní dvoch trojuholníkov so spoločnou výškou (obr. 1). Našou úlohou tak je dokázať nerovnosť

$$\frac{|BZ|}{|YZ|} + \frac{|CZ|}{|XZ|} > 2.$$




Obr. 1

Kolmé priemety bodov $B$, $C$, $X$, $Y$ na priamku $AZ$ označíme $B'$, $C'$, $X'$, $Y'$ ako na obr. 1. Tak môžeme dokazovanú nerovnosť prepísať ako

$$\frac{|BB'|}{|YY'|} + \frac{|CC'|}{|XX'|} > 2.$$

Teraz stačí použiť AG nerovnosť a nerovnosti $|BB'|/|XX'| > 1$ a $|CC'|/|YY'| > 1$, ktoré zrejme vyplývajú z voľby bodov $X$, $Y$ vnútri strán $AB$, $AC$. Dostávame tak

$$\frac{|BB'|}{|YY'|} + \frac{|CC'|}{|XX'|} \geqq 2\sqrt{\frac{|BB'|}{|YY'|} \cdot \frac{|CC'|}{|XX'|}} = 2\sqrt{\frac{|BB'|}{|XX'|} \cdot \frac{|CC'|}{|YY'|}} > 2.$$

**Iné riešenie.** Využijeme pomerne známu rovnosť

$$[XYZ] \cdot [BCZ] = [BZX] \cdot [CZY],$$

ktorá platí pre *ľubovoľný* konvexný štvoruholník $BCYX$ (s bodom $Z$ v priesečníku uhlopriečok, obr. 1) a ktorú vďaka spoločnej hodnote sínusov štyroch uhlov $XZY$, $BZC$, $BZX$, $CZY$ okamžite dostaneme po štvornásobnom použití školského vzorca $[ABC] = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

V spojení s AG nerovnosťou potom máme

$$[BZX] + [CZY] \geqq 2\sqrt{[BZX] \cdot [CZY]} = 2\sqrt{[XYZ] \cdot [BCZ]},$$

preto nám v našej situácii ostáva overiť iba nerovnosť $[BCZ] > [XYZ]$. Po pripočítaní $[BXZ]$ k obom jej stranám dostaneme ale nerovnosť $[BXC] > [BXY]$, ktorá zrejme platí, lebo bod $C$ má od priamky $BX$ väčšiu vzdialenosť ako bod $Y$ (vďaka tomu, že $Y$ leží medzi bodmi $A$ a $C$).

**Iné riešenie.** Zaveďme tri kladné čísla

$$\alpha = \frac{[BZC]}{[ABC]}, \quad \beta = \frac{[CZA]}{[ABC]}, \quad \gamma = \frac{[AZB]}{[ABC]},$$

pre ktoré zjavne platí $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Navyše je

$$\frac{[BZX]}{[XYZ]} = \frac{|BZ|}{|ZY|} = \frac{|BY|}{|ZY|} - 1 = \frac{[ABC]}{[CZA]} - 1 = \frac{1}{\beta} - 1,$$

pričom v prvej rovnosti sme využili spoločné výšky, zatiaľ čo v tretej rovnosti spoločné základne oboch dotyčných trojuholníkov. Podobne možno odvodiť, že

$$\frac{[CZY]}{[XYZ]} = \frac{1}{\gamma} - 1,$$

a dokazovanú nerovnosť možno tak po vydelení číslom $[XYZ]$ (a pripočítaní dvojky) ekvivalentne prepísať ako

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > 4.$$

Tá však vzhľadom na $\beta + \gamma < 1$ už vyplýva zo známej (Cauchyho) nerovnosti:

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)(\beta + \gamma) \geqq 4.$$

---

**3.** *Uvažujme sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + p &= z, \\ y^2 - 3z + p &= x, \\ z^2 - 3x + p &= y \end{aligned}$$

*s reálnym parametrom $p$.*

*a) Pre $p \geqq 4$ vyriešte uvažovanú sústavu v obore reálnych čísel.*

*b) Dokážte, že pre $p \in \langle 1, 4)$ každé reálne riešenie sústavy spĺňa $x = y = z$.*

(Jaroslav Švrček)

**Riešenie.** Keď sčítame zadané rovnice, získame

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 3p = 0,$$

čo možno doplnením na štvorce upraviť na tvar

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 + 3p - 12 = 0.$$

Ak je $p > 4$, je ľavá strana kladná a rovnosť nastať nemôže. Pre $p = 4$ je nutne $x = y = z = 2$, čo je aj riešenie pôvodnej sústavy. Tým sme vyriešili časť a).

Pre prípad $p \in \langle 1, 4)$ najskôr ukážeme, že $x$, $y$ a $z$ sú nezáporné reálne čísla. Predpokladajme (bez ujmy na všeobecnosti), že $y < 0$. Potom z prvej a tretej rovnice odvodíme

$$x^2 - z + p < 0, \tag{1}$$
$$z^2 - 3x + p < 0, \tag{2}$$

odkiaľ vzhľadom na $p > 0$ vyplýva, že $x > 0$, $z > 0$. Zároveň ale platia nerovnosti

$$\begin{aligned} x^2 - z + p < 0 \leqq (x - \sqrt{p})^2, \\ z^2 - 3x + p < 0 \leqq (z - \sqrt{p})^2. \end{aligned}$$

Porovnaním ľavých a pravých strán vzhľadom na $p \geqq 1$ získame

$$\begin{aligned} z &> 2x\sqrt{p} \geqq 2x, \\ x &> \frac{2}{3}z\sqrt{p} \geqq \frac{2}{3}z. \end{aligned}$$

Oboje pre kladné $x$, $z$ nie je možné, a tým sme doviedli predpoklad $y < 0$ k sporu.

Ďalej môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $x \geqq y \geqq 0$ a $x \geqq z \geqq 0$. Potom platí $x^2 \geqq z^2$, $-3y \geqq -3x$, a preto

$$z = x^2 - 3y + p \geqq z^2 - 3x + p = y.$$

Je teda $x \geqq z \geqq y \geqq 0$. To však znamená, že $-3y \geqq -3z$ a súčasne $x^2 \geqq y^2$. Potom

$$z = x^2 - 3y + p \geqq y^2 - 3z + p = x,$$

teda $z \geqq x$, a preto $x = z$. Odčítaním tretej rovnice od prvej (v pôvodnej sústave) dostávame vzhľadom na rovnosť $x = z$ vzťah $3(x - y) = x - y$, z ktorého ale vyplýva $x = y$. Naozaj tak platí $x = y = z$.

**Iné riešenie.** V tomto riešení ukážeme, že sústava nemá iné riešenia ako tie, pre ktoré $x = y = z$, dokonca pri ľubovoľnom $p > -10$. Keďže v prípade rovnosti dvoch neznámych možno ako v samotnom závere prvého riešenia dokázať rovnosť všetkých troch, stačí nám pre spor predpokladať, že uvažovaná sústava má riešenie $(x, y, z)$ s navzájom rôznymi číslami $x$, $y$ a $z$.

Rozdiel prvých dvoch rovníc upravíme na tvar

$$(x - y)(x + y) = 3y - 2z - x,$$

ktorého pravú stranu možno upraviť dvoma spôsobmi ako

$$3y - 2z - x = \begin{cases} (y - x) + 2(y - z), \\ 3(y - x) + 2(x - z). \end{cases}$$

Rozdiel prvých dvoch rovníc možno tak prepísať dvoma spôsobmi

$$(x-y)(x+y+1)=2(y-z),$$
$$(x-y)(x+y+3)=2(x-z).$$

Po zostavení ďalších dvoch analogických dvojíc rovností (prislúchajúcich rozdielom iných dvoch rovníc) medzi sebou vynásobíme tri rovnosti jedného typu a ďalšie tri rovnosti druhého typu, čím po vykrátení nenulových rozdielov neznámych (vďaka predpokladu $x \neq y \neq z \neq x$) získame

$$(x+y+1)(y+z+1)(z+x+1)=8,$$
$$(x+y+3)(y+z+3)(z+x+3)=-8.$$

Ľavé strany oboch týchto rovností sú symetrické funkcie premenných $x$, $y$, $z$. Tretiu takú rovnosť dostaneme sčítaním všetkých troch pôvodných rovníc:

$$x^2+y^2+z^2-4(x+y+z)+3p=0.$$

Technickú náročnosť situácie teraz zmiernime prechodom k premenným

$$a=x+y+1,$$
$$b=y+z+1,$$
$$c=z+x+1,$$

pričom naším cieľom bude prepísať trojicu symetrických rovníc iba pomocou elementárnych symetrických polynómov

$$\alpha=a+b+c,$$
$$\beta=ab+bc+ca,$$
$$\gamma=abc.$$

Po chvíli úprav naozaj získame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \gamma &= 8, \\ \gamma+2\beta+4\alpha &= -16, \\ 3\alpha^2-8\beta-10\alpha+12p &= -27. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch rovníc možno vyjadriť $\beta=-12-2\alpha$, čo po dosadení do tretej rovnice vedie na jej zjednodušenie na tvar

$$\alpha^2+2\alpha+41+4p=0.$$

Diskriminant tejto kvadratickej rovnice je

$$4-4(41+4p)=-16p-160,$$

čo je pre $p>-10$ záporný výraz, a máme tak želaný spor s predpokladanou existenciou riešenia s navzájom rôznymi číslami $x$, $y$ a $z$.

*Poznámka.* Pre $p=-10$ má sústava riešenie $(x,y,z)$ s približnými hodnotami $(-0{,}21; -4{,}08; 2{,}30)$ (a jeho cyklické obmeny), čo sú korene istého konkrétneho kubického polynómu (príslušné čísla $a$, $b$, $c$ sú korene polynómu $P(t)=t^3+t^2-10t-8$). Pre $p=-11$ má sústava dokonca celočíselné riešenie $(-1,-4,2)$.

**4.** *Kladné celé čísla $a$, $b$ spĺňajú rovnosť $b^2 = a^2 + ab + b$. Dokážte, že $b$ je druhou mocninou kladného celého čísla.* (*Patrik Bak*)

**Riešenie.** Označme $d$ najväčší spoločný deliteľ čísel $a$, $b$. Potom platí, že $a = da_1$, $b = db_1$ pre nejaké nesúdeliteľné prirodzené čísla $a_1$, $b_1$. Rovnosť zo zadania preto možno (po vydelení číslom $d$) písať ako

$$db_1^2 = da_1^2 + da_1b_1 + b_1.$$

Keďže $d$ delí ľavú stranu tejto rovnosti, musí deliť aj tú pravú, čo nastane práve vtedy, keď $d \mid b_1$. Podobne platí, že $b_1$ delí ľavú stranu, a teda aj tú pravú, čiže $b_1 \mid da_1^2$. Keďže čísla $a_1$ a $b_1$ sú nesúdeliteľné, musí platiť $b_1 \mid d$. Zo vzájomnej deliteľnosti $d \mid b_1$ a $b_1 \mid d$ teda vyplýva, že $d = b_1$. Preto $b = db_1 = b_1^2$, čo je druhá mocnina prirodzeného čísla, a dôkaz je tak ukončený.

**Iné riešenie.** Keďže prirodzené číslo $a$ je riešením kvadratickej rovnice $x^2 + xb + b - b^2 = 0$, je diskriminant tejto rovnice $b^2 - 4(b - b^2) = b(5b - 4)$ rovný druhej mocnine nejakého prirodzeného čísla $k$.

Najväčší spoločný deliteľ $d$ čísel $b$ a $5b - 4$ je zrejme deliteľom aj čísla 4. Preto prichádzajú do úvahy iba hodnoty $d \in \{1, 2, 4\}$.

Ak je $d = 1$, sú čísla $b$ a $5b-4$ nesúdeliteľné, a rovnosť $b(5b-4) = k^2$ tak znamená, že obe tieto čísla (a špeciálne číslo $b$) sú druhé mocniny nejakého prirodzeného čísla.

Ak je $d = 4$, možno písať $b = 4r$ a potom

$$k^2 = b(5b - 4) = 4r(20r - 4) = 16r(5r - 1).$$

Druhými mocninami sú teda nielen čísla $k^2$ a $16 = 4^2$, ale aj hodnota súčinu $r(5r - 1)$ dvoch zjavne nesúdeliteľných čísel, a teda druhými mocninami sú aj oba činitele. Pre isté prirodzené číslo $m$ tak platí $r = m^2$, odkiaľ $b = 4r = 4m^2$ čiže $b = (2m)^2$.

Nakoniec ukážeme, že zvyšný prípad $d = 2$ nastať nemôže. Podobne ako v predchádzajúcom prípade odvodíme, že $\frac{1}{2}b = p^2$ a $\frac{1}{2}(5b-4) = q^2$ pre nejaké prirodzené čísla $p$ a $q$. Elimináciou $b$ získame rovnosť $q^2 = 5p^2 - 2$, v ktorej pravá strana dáva zvyšok 3 po delení piatimi. Ale druhá mocnina prirodzeného čísla dáva vždy jeden zo zvyškov 0, 1, 4, a prípad $d = 2$ tak naozaj nemôže nastať.

Tým sme dokázali, že $b$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.

*Poznámka.* Príklady $(2, 4)$ a $(15, 25)$ dvojíc $(a, b)$ ukazujú, že čísla zo zadania naozaj existujú.

---

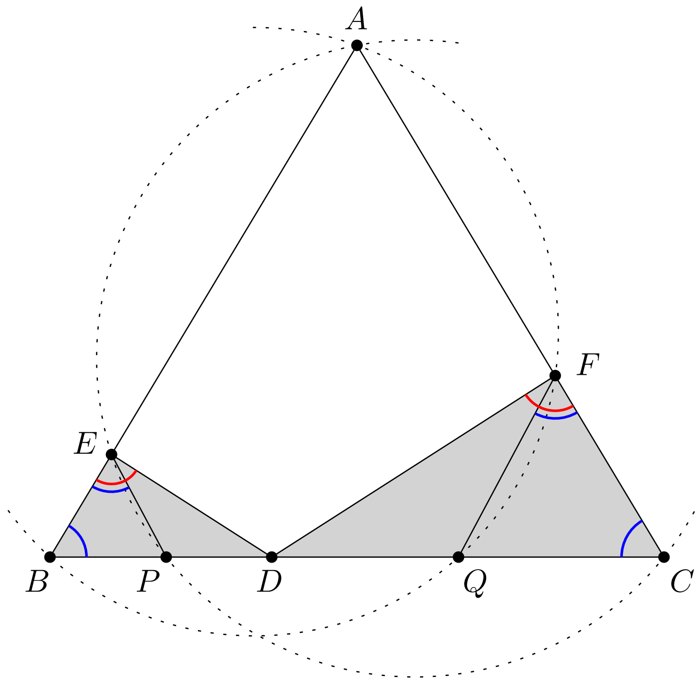
**5.** *Daný je rovnoramenný trojuholník $ABC$ so základňou $BC$, vnútri ktorej je zvolený bod $D$. Nech $E$, $F$ sú postupne také body na stranách $AB$, $AC$, že platí $|\angle BED| = |\angle DFC| > 90°$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom $ABF$ a $AEC$ sa pretínajú na priamke $AD$ v bode rôznom od bodu $A$.* (*Patrik Bak, Michal Rolínek*)

**Riešenie.** Dokážeme, že bod $D$ má rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Podľa známeho tvrdenia o *chordále* je množinou takých bodov priamka, na ktorej v prípade pretínajúcich sa kružníc ležia oba priesečníky. Bod $D$ tak bude ležať na tejto spojnici, čo je iba iná formulácia dokazovaného tvrdenia.

Označme $P$ priesečník kružnice opísanej trojuholníku $AEC$ s úsečkou $BC$ (obr. 2). Potom z tetivového štvoruholníka $AEPC$ získame

$$|\measuredangle BEP| = 180° - |\measuredangle PEA| = |\measuredangle ACP|$$

a z rovnoramennosti trojuholníka $ABC$ ďalej tiež $|\measuredangle ACP| = |\measuredangle PBE|$. Celkom tak máme $|\measuredangle BEP| = |\measuredangle PBE|$, a platí preto $|PB| = |PE|$. Podobne pre priesečník $Q$ kružnice opísanej trojuholníku $AFB$ s úsečkou $BC$ platí $|QC| = |QF|$. Keďže podľa zadania sú oba uhly $BED$ a $CFD$ tupé, ležia body $P$ a $Q$ vnútri prislúchajúcich úsečiek $DB$ a $DC$, čo zároveň znamená, že bod $D$ leží vnútri oboch prislúchajúcich kruhov.




Obr. 2

Všimnime si, že trojuholníky $BED$ a $CFD$ sú podobné podľa vety $uu$ a bodu $P$ pritom zodpovedá bod $Q$. Preto ak označíme $k$ koeficient tejto podobnosti, platí

$$|DB| \cdot |DQ| = \frac{1}{k}|DC| \cdot k|DP| = |DC| \cdot |DP|.$$

Bod $D$ tak má rovnakú mocnosť ku kružniciam opísaným trojuholníkom $ABF$ a $AEC$, ako sme chceli dokázať.

---

**6.** *Pre každé kladné celé číslo $k$ označme $P(k)$ počet všetkých kladných celých $4k$-ciferných čísel, ktoré možno zostaviť z cifier 2, 0 a ktoré sú deliteľné číslom 2 020. Dokážte nerovnosť*

$$P(k) \geqq \binom{2k-1}{k}^2$$

*a určte všetky $k$, pre ktoré nastane rovnosť.*
*(Poznámka. Zápis kladného celého čísla nemôže začínať cifrou 0.)* (Jaromír Šimša)

**Riešenie.** Všetky vyhovujúce $4k$-ciferné čísla sú tvaru $2 \cdot J$, pričom $J$ je ľubovoľné $4k$-ciferné číslo zostavené z cifier 1 a 0, ktoré je deliteľné číslom $1\,010 = 10 \cdot 101$. Hodnota $P(k)$ tak udáva počet takých $4k$-ciferných čísel $J$ zostavených z cifier 1 a 0, ktoré končia cifrou nula a ktoré sú deliteľné číslom 101.

$4k$-ciferné číslo $J = \overline{c_{4k-1}c_{4k-2}\dots c_1c_0}$ dáva po delení číslom 101 rovnaký zvyšok ako číslo

$$S(J) = s_0 + 10s_1 - s_2 - 10s_3 = (s_0 - s_2) + 10(s_1 - s_3), \tag{1}$$

pričom

$$s_0 = c_0 + c_4 + \dots + c_{4k-4}, \quad s_1 = c_1 + c_5 + \dots + c_{4k-3},$$
$$s_2 = c_2 + c_6 + \dots + c_{4k-2}, \quad s_3 = c_3 + c_7 + \dots + c_{4k-1}.$$

Vyplýva to z toho, že mocniny $10^{4i}$, $10^{4i+1}$, $10^{4i+2}$, $10^{4i+3}$ dávajú po delení číslom 101 postupne rovnaké zvyšky ako čísla 1, 10, $-1$, $-10$, čo je jednoduché overiť indukciou vzhľadom na celé číslo $i \geqq 0$.

Pre splnenie podmienky $101 \mid S(J)$ podľa (1) určite stačí, aby platila silnejšia podmienka

$$s_0 - s_2 = 0 \quad \text{a} \quad s_1 - s_3 = 0. \tag{2}$$

Pri danom $k$ určíme počet takých čísel $J$ s ciframi $c_i \in \{1, 0\}$, pre ktoré okrem (2) platí $c_{4k-1} = 1$ a $c_0 = 0$ (aby naozaj išlo o $4k$-ciferné číslo deliteľné desiatimi). Ak upravíme rovnosť (2) s dosadenými hodnotami $c_{4k-1}$, $c_0$ na tvar

$$0 + c_4 + c_8 + \dots + c_{4k-4} + (1 - c_2) + (1 - c_6) + \dots + (1 - c_{4k-2}) = k,$$
$$c_1 + c_5 + \dots + c_{4k-3} + (1 - c_3) + (1 - c_7) + \dots + (1 - c_{4k-5}) + 0 = k,$$

dôjdeme podľa kombinatorického pravidla súčinu k záveru, že hľadaný počet je rovný číslu

$$\binom{2k-1}{k}^2.$$

To platí, lebo na ľavých stranách upravených rovností tvoria sčítance ľubovoľnú permutáciu $k$ jednotiek a $k$ núl, pri ktorej je však jedna pozícia nuly (na úplnom začiatku alebo konci) zadaná. Tým je nerovnosť zo zadania úlohy dokázaná.

V druhej časti riešenia ukážeme, že rovnosť v dokázanej nerovnosti nastane práve vtedy, keď $k \leqq 9$. Pre každé $k$ totiž vďaka podmienkam $c_{4k-1} = 1$ a $c_0 = 0$ súčty $s_i$ spĺňajú nerovnosti

$$0 \leqq s_0 \leqq k - 1, \quad 0 \leqq s_1 \leqq k, \quad 0 \leqq s_2 \leqq k, \quad 1 \leqq s_3 \leqq k.$$

Podľa nich pre oba rozdiely $d_0 = s_0 - s_2$ a $d_1 = s_1 - s_3$ platí $-k \leqq d_i \leqq k - 1$, odkiaľ pre súčet $S(J)$ z (1) vyplývajú odhady $-11k \leqq S(J) \leqq 11(k-1)$. V prípade $k \leqq 9$ to zrejme znamená, že $101 \mid S(J)$ práve vtedy, keď $S(J) = 0$, čiže $d_0 = -10d_1$. To potom ale nastane jedine tak, že $d_0 = d_1 = 0$, lebo všeobecné odhady čísla $d_0$ pre $k \leqq 9$ vedú k nerovnostiam $-9 \leqq d_0 \leqq 8$, takže $10 \mid d_0$ iba pre $d_0 = 0$.

Ostáva pre každé $k \geqq 10$ uviesť príklad vyhovujúceho čísla $J$, pre ktoré je $S(J)$ nenulový násobok čísla 101, napr. $S(J) = -101$. Posledné platí, ak $s_0 = s_1 = 0$, $s_2 = 1$ a $s_3 = 10$. Že možno také cifry $c_i \in \{1, 0\}$ pre každé $k \geqq 10$ vybrať (aby pritom platilo $c_{4k-1} = 1$ a $c_0 = 0$), je zrejmé: za jednotky zvolíme iba jeden sčítanec v súčte $s_2$ a sčítanec $c_{4k-1}$ a ľubovoľných deväť ďalších v súčte $s_3$.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

| | |
|---|---|
| Autori: | Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf |
| Recenzenti: | Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný |
| Redakčná úprava: | Patrik Bak, Peter Novotný |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020 |