

2020/2021  
70. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

(Termín odovzdania: v pondelok 18. januára 2021.)

1. Určte všetky dvojice  $(m, n)$  prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

pričom  $s(a)$  označuje ciferný súčet prirodzeného čísla  $a$ . (Jaroslav Švrček)

2. Určte, pre ktoré prirodzené čísla  $n$  možno tabuľku  $n \times n$  vyplniť číslami 2 a  $-1$  tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0. (Ján Mazák)

3. V pravouhlom trojuholníku  $ABC$  s preponou  $AB$  označme postupne  $I$  a  $U$  stred kružnice jemu vpísanej a dotykový bod tejto kružnice s odvesnou  $BC$ . Určte, aký je pomer  $|AC| : |BC|$ , ak sú uhly  $CAU$  a  $CBI$  zhodné. (Jaroslav Zhouf)

4. Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{a + bc}{a + b} + \frac{b + ca}{b + c} + \frac{c + ab}{c + a},$$

ak sú  $a, b, c$  kladné reálne čísla so súčtom 1. (Michal Rolínek, Pavel Calábek)

5. Daný je trojuholník  $ABC$  s ťažiskom  $T$ . Na priamkach  $AT$  a  $BT$  sú zvolené postupne body  $E$  a  $F$  tak, že štvoruholník  $TECF$  je rovnobežník. Dokážte, že úsečky  $AC$  a  $BC$  delia úsečku  $EF$  na tri zhodné časti. (Tomáš Jurík)

6. Na tabuli je napísaných niekoľko prirodzených čísel od 1 do 100, pričom žiadne z nich nie je deliteľné dvojciferným prvočíslom a súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

a) Určte najväčší možný počet čísel na tabuli.

b) Určte najväčší možný súčet čísel na tabuli.

(Jaromír Šimša)