

2020/2021
70. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

(Termín odovzdania: v pondelok 18. januára 2021.)

1. Určte všetky dvojice (m, n) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

pričom $s(a)$ označuje ciferný súčet prirodzeného čísla a . (Jaroslav Švrček)

2. Určte, pre ktoré prirodzené čísla n možno tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 2 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0. (Ján Mazák)

3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme postupne I a U stred kružnice jemu vpísanej a dotykový bod tejto kružnice s odvesnou BC . Určte, aký je pomer $|AC| : |BC|$, ak sú uhly CAU a CBI zhodné. (Jaroslav Zhouf)

4. Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{a + bc}{a + b} + \frac{b + ca}{b + c} + \frac{c + ab}{c + a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1. (Michal Rolínek, Pavel Calábek)

5. Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T . Na priamkach AT a BT sú zvolené postupne body E a F tak, že štvoruholník $TECF$ je rovnobežník. Dokážte, že úsečky AC a BC delia úsečku EF na tri zhodné časti. (Tomáš Jurík)

6. Na tabuli je napísaných niekoľko prirodzených čísel od 1 do 100, pričom žiadne z nich nie je deliteľné dvojciferným prvočíslom a súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

a) Určte najväčší možný počet čísel na tabuli.

b) Určte najväčší možný súčet čísel na tabuli.

(Jaromír Šimša)