

2020/2021  
70. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: v pondelok 18. januára 2021.)

1. Z cifier 0 až 9 vytvoríme dvojciferné čísla  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$ ,  $IJ$ , pričom každú cifru použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať súčet  $AB + CD + EF + GH + IJ$  a ktoré hodnoty to sú. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojciferné čísla.) (Jaroslav Zhouf)

2. Aká je najväčšia možná hodnota výrazu  $xy - x^3y - xy^3$ , ak sú  $x$ ,  $y$  kladné reálne čísla? Pre ktoré  $x$ ,  $y$  sa táto hodnota dosahuje? (Mária Dományová, Patrik Bak)

3. V ostrouhlom trojuholníku  $ABC$  sú  $AA'$  a  $BB'$  jeho výšky. Kolmý priemet bodu  $A'$  na výšku  $BB'$  označme  $D$ . Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi  $B$ ,  $C$ ,  $D$  pretína stranu  $AC$  v jej vnútornom bode  $E$ . Dokážte, že  $|DE| = |AA'|$ . (Patrik Bak)

4. Zistite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra  $k$  má sústava rovníc

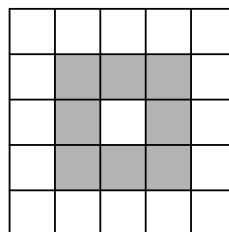
$$\begin{aligned} |x + 6| + 2|y| &= 24, \\ |x + y| + |x - y| &= 2k \end{aligned}$$

nepárny počet riešení v obore reálnych čísel.

(Pavel Calábek)

5. Daný je pravidelný sedemuholník  $ABCDEFG$ . Kolmica vedená bodom  $D$  na priamku  $DE$  pretína priamky  $CG$  a  $AB$  postupne v bodoch  $P$  a  $Q$ . Dokážte, že  $|AQ| + |EF| = |GP|$ . (Marián Poturnay)

6. Na pláne s rozmermi  $12 \times 12$  štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca  $3 \times 3$  (na obrázku je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz? (Jozef Rajník)



Obr. 1