

2020/2021
70. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: v pondelok 18. januára 2021.)

1. Z cifier 0 až 9 vytvoríme dvojciferné čísla AB , CD , EF , GH , IJ , pričom každú cifru použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať súčet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a ktoré hodnoty to sú. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojciferné čísla.) (Jaroslav Zhouf)

2. Aká je najväčšia možná hodnota výrazu $xy - x^3y - xy^3$, ak sú x , y kladné reálne čísla? Pre ktoré x , y sa táto hodnota dosahuje? (Mária Dományová, Patrik Bak)

3. V ostrouhlom trojuholníku ABC sú AA' a BB' jeho výšky. Kolmý priemet bodu A' na výšku BB' označme D . Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi B , C , D pretína stranu AC v jej vnútornom bode E . Dokážte, že $|DE| = |AA'|$. (Patrik Bak)

4. Zistite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra k má sústava rovníc

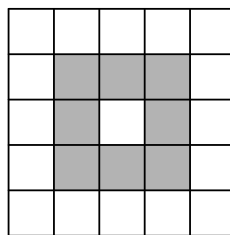
$$\begin{aligned} |x + 6| + 2|y| &= 24, \\ |x + y| + |x - y| &= 2k \end{aligned}$$

nepárny počet riešení v obore reálnych čísel.

(Pavel Calábek)

5. Daný je pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Kolmica vedená bodom D na priamku DE pretína priamky CG a AB postupne v bodoch P a Q . Dokážte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$. (Marián Poturnay)

6. Na pláne s rozmermi 12×12 štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca 3×3 (na obr. 1 je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz? (Jozef Rajník)



Obr. 1