2020/2021

70. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v utorok 1. decembra 2020.*)

1. Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je

a) päť;

b) sedem. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

2. V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia na strane BC body D a E tak, že D je medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je taký bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokážte, že $|FB| = |FC|$. (*Patrik Bak*)

3. Ak sú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla, aký je najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc? (*Patrik Bak*)

4. Najväčšieho deliteľa d prirodzeného čísla $n > 1$ s vlastnosťou $d < n$ nazveme jeho *superdeliteľom.*

a) Dokážte, že každé prirodzené číslo $d > 1$ je superdeliteľom iba konečného počtu čísel.

b) Označme $s(d)$ súčet všetkých čísel, ktorých superdeliteľom je dané číslo $d > 1$. Rozhodnite, či existuje nepárne číslo $d > 1$ také, že $s(d)$ je násobkom čísla 2 020.

(*Michal Rolínek*)

5. V trojuholníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupne stredy jeho strán BC, CA, AB. Dokážte, že pre ľubovoľný bod X rôzny od bodov S_a, S_b, S_c platí

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(*Patrik Bak*)

6. Majme 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek vieme pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne zasvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)? (*Martin Melicher*)