SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

60. ročník, školský rok 2010/2011

Domáce kolo

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 60. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.

Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.

Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.

Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **29. novembra 2010** (kategória **A**) a do **10. januára 2011** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2011 v Holandsku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2011 v Poľsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v septembri 2011 v Chorvátsku).

Termíny 60. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	07. 12. 2010	18. 01. 2011	27. – 30. 03. 2011
Kategórie B, C	20. 01. 2011	05. 04. 2011	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2010/2011
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://matematika.okamzite.eu`
`http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku, prípadne na `http://kms.sk`.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

RNDr. Ján Mazák, Bc. Michal Prusák

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

60. ročník Školský rok 2010 / 2011 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Korene rovnice

$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$

v obore reálnych čísel sú štyri po sebe idúce členy rastúcej aritmetickej postupnosti. Pritom jeden z týchto členov je zároveň riešením rovnice

$$bx^2 + ax + a = 1.$$

Určte všetky možné hodnoty reálnych parametrov a, b. (*Peter Novotný*)

A – I – 2

Nech k, n sú prirodzené čísla. Z platnosti tvrdenia „číslo $(n-1)(n+1)$ je deliteľné číslom k“ Adam usúdil, že buď číslo $n-1$, alebo číslo $n+1$ je deliteľné k. Určte všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je Adamova úvaha správna pre každé prirodzené n. (*Ján Mazák*)

A – I – 3

Dané sú kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Majme $6n$ žetónov až na farbu zhodných, po troch z každej z $2n$ farieb. Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ určte počet p_n všetkých takých rozdelení $6n$ žetónov na dve kôpky po $3n$ žetónoch, že žiadne tri žetóny rovnakej farby nie sú v rovnakej kôpke. Dokážte, že p_n je nepárne číslo práve vtedy, keď $n = 2^k$ pre vhodné prirodzené k. (*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby po konečnom počte vhodných krokov mohli byť na všetkých stenách kocky rovnaké čísla. (*Peter Novotný*)

A – I – 6

Dokážte, že v každom trojuholníku ABC s ostrým uhlom pri vrchole C (pri zvyčajnom označení dĺžok strán a veľkostí vnútorných uhlov) platí nerovnosť

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \le 2ab.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

****

KATEGÓRIA B

B – I – 1

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= z+1,\\ \sqrt{y^2+z^2} &= x+1,\\ \sqrt{z^2+x^2} &= y+1.\end{aligned}$$

(*Tomáš Jurík*)

B – I – 2

Uvažujme vnútorný bod P daného obdĺžnika $ABCD$ a označme postupne Q, R obrazy bodu P v súmernostiach podľa stredov A, C. Predpokladajme, že priamka QR pretne strany AB a BC vo vnútorných bodoch M a N. Zostrojte množinu všetkých bodov P, pre ktoré platí $|MN| = |AB|$.

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je 6. Dokážte, že aspoň jedno z čísel

$$ab+bc, \quad bc+ca, \quad ca+ab$$

nie je väčšie ako 8. (*Ján Mazák*)

B – I – 4

Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je zlomok

$$\frac{n^3+2\,010}{n^2+2\,010}$$

rovný celému číslu. (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

Zaoberajme sa otázkou, ktoré trojuholníky ABC s ostrými uhlami pri vrcholoch A a B majú nasledujúcu vlastnosť: Ak vedieme stredom výšky z vrcholu C tri priamky rovnobežné so stranami trojuholníka ABC, pretnú ich tieto priamky v šiestich bodoch ležiacich na jednej kružnici.

a) Ukážte, že vyhovuje každý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C.

b) Vysvetlite, prečo žiadny iný trojuholník ABC nevyhovuje. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Určte počet desaťciferných čísel, v ktorých možno škrtnúť dve susedné cifry a dostať tak číslo 99-krát menšie. (*Ján Mazák*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

60. ročník   Školský rok 2010 / 2011   Domáce kolo

KATEGÓRIA C

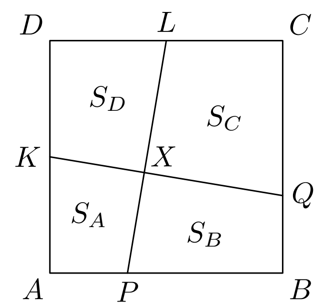
C – I – 1

Lucia napísala na tabuľu dve nenulové čísla. Potom medzi ne postupne vkladala znamienka plus, mínus, krát a delené a všetky štyri príklady správne vypočítala. Medzi výsledkami boli iba dve rôzne hodnoty. Aké dve čísla mohla Lucia na tabuľu napísať? (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Dokážte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x, y. (*Jaroslav Zhouf*)

C – I – 3



Máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm. Body K a L sú stredy strán DA a DC. Bod P leží na strane AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na strane BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL sa pretínajú v bode X. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupne S_A, S_B, S_C, S_D (ako na obrázku).

a) Dokážte, že $S_B = S_D$.

b) Vypočítajte rozdiel $S_C - S_A$.

c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$. (*Peter Novotný*)

C – I – 4

V skupine n žiakov sa spolu niektorí kamarátia. Vieme, že každý má medzi ostatnými aspoň štyroch kamarátov. Učiteľka chce žiakov rozdeliť na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny tak, že každý bude mať vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

a) Ukážte, že v prípade $n = 7$ sa dajú žiaci požadovaným spôsobom vždy rozdeliť.

b) Zistite, či možno žiakov takto vždy rozdeliť aj v prípade $n = 8$. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 5

Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Je daný lichobežník $ABCD$. Stred základne AB označme P. Uvažujme rovnobežku so základňou AB, ktorá pretína úsečky AD, PD, PC, BC postupne v bodoch K, L, M, N.

a) Dokážte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určte polohu priamky KL tak, aby platilo aj $|KL| = |LM|$. (*Jaroslav Zhouf*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

60. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh: RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák,
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Peter Novotný, PhD.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR
Miesto a dátum vydania: Bratislava, september 2010
Sadzbu programom TEX pripravil Mgr. Peter Novotný, PhD.