SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

70. ročník, školský rok 2020/2021

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 70. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.

Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.

Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.

Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **1. decembra 2020** (kategória **A**) a do **18. januára 2021** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2021 v Rusku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2021 v Rakúsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude na konci augusta 2021 na Slovensku alebo v Chorvátsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2021 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 70. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	08. 12. 2020	12. 01. 2021	21. – 24. marca 2021
Kategórie B, C	26. 01. 2021	30. 03. 2021	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2020/2021
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Egy táblára felírtunk néhány (egymástól nem feltétlenül különböző) prímszámot, amelyek szorzata 105-ször nagyobb, mint az összegük. Határozd meg a felírt prímszámokat, ha a számuk

a) öt;

b) hét. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

A – I – 2

A hegyesszögű ABC háromszög BC oldalán rendre felvettük a D és E pontokat úgy, hogy a D pont a B és E pontok között fekszik, valamint $|AD| = |CD|$ és $|AE| = |BE|$. Az F pont egy olyan pont, amelyre $FD \parallel AB$ és $FE \parallel AC$. Bizonyítsd be, hogy $|FB| = |FC|$. (*Patrik Bak*)

A – I – 3

Ha a, b, c egymástól különböző pozitív valós számok, akkor legalább hány egymástól különböző számot találunk az $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc számok között? (*Patrik Bak*)

A – I – 4

A természetes $n > 1$ szám azon legnagyobb d osztóját, amelyre $d < n$, *szuperosztónak* hívunk.

a) Bizonyítsd be, hogy a természetes $d > 1$ szám, csak véges sok számnak lehet a szuperosztója!

b) Jelölje $s(d)$ az összes olyan szám összegét, amelyeknek a $d > 1$ szám a szuperosztója. Döntsd el, hogy létezik-e olyan páratlan $d > 1$ szám, amelyre $s(d)$ a $2\,020$ többszöröse!

(*Michal Rolínek*)

A – I – 5

Az ABC háromszögben jelölje rendre S_a, S_b, S_c a BC, CA, AB oldalak középpontját! Bizonyítsd be, hogy a tetszőleges, S_a, S_b és S_c pontoktól különböző X pontra

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(*Patrik Bak*)

A – I – 6

Van 70 darab leoltott állapotban levő villanyégőnk. Az égők tetszőleges csoportjához tudunk egy olyan kapcsolót készíteni, hogy ez a kapcsoló csak a csoportban levő égők állapotát tudja megváltoztatni (a feloltottakat leoltja, a leoltottakat feloltja) a többi égőre nincs hatással. Legalább hány kapcsoló szükséges ahhoz, hogy az égők tetszőleges négyes csoportját fel tudjuk oltani úgy, hogy a többi égő leoltott állapotban legyen? (*Martin Melicher*)

****

KATEGÓRIA B

B – I – 1

A 0-tól 9-ig terjedő számjegyekből felírtuk a kétjegyű AB, CD, EF, GH, IJ számokat úgy, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használtunk fel. Határozd meg, hogy az $AB+CD+EF+GH+IJ$ összeg hány különböző értéket vehet fel, és melyek ezek az értékek! (A 07 jellegű felírást nem tekintjük kétjegyű számnak.) (*Jaroslav Zhouf*)

B – I – 2

Mennyi az $xy - x^3y - xy^3$ kifejezés lehető legnagyobb értéke, ha x és y pozitív valós számok? Az x, y mely értékeire veszi fel ezt a maximumot? (*Mária Dományová, Patrik Bak*)

B – I – 3

Az ABC hegyesszögű háromszögben AA' és BB' magasságvonalak. Az A' pont merőleges vetületét a BB' magasságvonalra jelölje D. Tegyük fel, hogy a B, C, D pontokra illeszkedő körvonal az AC oldalat egy belső E pontjában metszi. Bizonyítsd be, hogy $|DE| = |AA'|$. (*Patrik Bak*)

B – I – 4

Határozd meg, hogy a k valós paraméter mely értékeire lesz az

$$\begin{aligned} |x+6| + 2|y| &= 24, \\ |x+y| + |x-y| &= 2k \end{aligned}$$

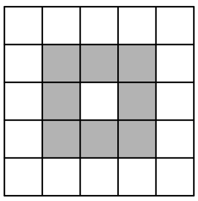
egyenletrendszernek páratlan számú megoldása a valós számok körében! (*Pavel Calábek*)

B – I – 5

Adott egy szabályos $ABCDEFG$ hétszög. A D pontból a DE egyenesre húzott merőleges a CG és AB egyeneseket rendre a P és Q pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy $|AQ|+|EF| = |GP|$. (*Marián Poturnay*)

B – I – 6

Egy 12×12-es négyzethálón el van helyezve egy hajó, amely egy 3×3-as négyzet kerületét alkotó nyolc mezőből áll (az ábrán szürke színnel van feltüntetve). Legalább hány mezőre kell rálőni, ha a hajót biztosan el akarjuk találni legalább egyszer? (*Jozef Rajník*)



KATEGÓRIA C

C – I – 1

Keresd meg az összes olyan természetes számokból álló (m, n) számpárt, amelyre

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

ahol $s(a)$ a természetes a szám számjegyeinek összegét jelöli. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Határozd meg, hogy melyek azok az n természetes számok, amelyekre az $n \times n$-es táblázat kitölthető a 2 és -1 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege nulla legyen! (*Ján Mazák*)

C – I – 3

Az AB átfogójú derékszögű ABC háromszögben jelölje rendre I és U a beírt kör középpontját, valamint ennek érintési pontját a BC befogóval. Határozd meg, hogy mekkora az $|AC| : |BC|$ arány, ha a CAU és CBI szögek egyenlő nagyságúak! (*Jaroslav Zhouf*)

C – I – 4

Határozd meg, milyen értékeket vehet fel az

$$\frac{a + bc}{a + b} + \frac{b + ca}{b + c} + \frac{c + ab}{c + a}$$

kifejezés, ha a, b, c olyan pozitív valós számok, melyek összege 1.
(*Michal Rolínek, Pavel Calábek*)

C – I – 5

Adott a T súlypontú ABC háromszög. Az AT és BT egyeneseken rendre felvettük az E és F pontokat úgy, hogy a $TECF$ négyszög paralelogrammát alkot. Bizonyítsd be, hogy az AC és BC szakaszok az EF szakaszt három egyenlő hosszúságú részre bontják! (*Tomáš Jurík*)

C – I – 6

Egy táblára felírtunk néhány 1-től 100-ig terjedő természetes számot úgy, hogy közülük semmelyik sem osztható kétjegyű prímszámmal, valamint semmelyik kettő szorzata nem négyzetszám.

a) Határozd meg, hogy legfeljebb hány szám kerülhetett fel a táblára!

b) Határozd meg a táblára kerülhető számok lehető legnagyobb összegét! (*Jaromír Šimša*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

70. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Mgr. Patrik Bak, RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Mária Dományová, RNDr. Tomáš Jurík, PhD., doc. RNDr. Ján Mazák, PhD., Martin Melicher, Marián Poturnay, Mgr. Jozef Rajník, Mgr. Michal Rolínek, PhD., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.
Recenzenti:	Mgr. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., doc. RNDr. Ján Mazák, PhD., Martin Melicher
Redakčná úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preklad:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020