70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Návodné úlohy domáceho kola kategórie A*

V prvej časti textu pod zadaním každej zo šiestich súťažných úloh nájdete zadania návodných a doplňajúcich úloh. Tie isté úlohy aj s riešeniami (resp. odpoveďami a náznakmi riešení či odkazmi na riešenia v našom archíve) nájdete v druhej časti textu.

---

1. *Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je*

a) päť;
b) sedem. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad troch prvočísel.
N2. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad štyroch prvočísel.
N3. Nájdite všetky trojice prvočísel také, že ich súčin je sedemnásobkom ich súčtu.
N4. Nájdite všetky celé čísla x a y, pre ktoré $3xy = 5x + 7y + 1$.
N5. Nájdite všetky prirodzené čísla x, y a z, pre ktoré platí $xyz = x + y + z + 2$.
D1. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad šiestich prvočísel.
D2. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad $n \geqq 8$ prvočísel.
D3. Nájdite všetky prvočísla x, y, z spĺňajúce rovnicu $x^2+y^2+z^2 = x+y+z+18$.
D4. Nájdite všetky prvočísla x, y, z spĺňajúce rovnicu $xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35$.

---

2. *V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia na strane BC body D a E tak, že D je medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je taký bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokážte, že $|FB| = |FC|$.* (*Patrik Bak*)

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Uvedomte si, ako sa dokazuje školský poznatok, že osi strán ľubovoľného trojuholníka ABC sa pretínajú v jednom bode.
N2. Dokážete použitím poznatku o osiach strán z úlohy N1 odvodiť iný školský poznatok, že aj výšky ľubovoľného trojuholníka ABC sa (ako priamky) pretínajú v jednom bode?
N3. Uvedomte si nasledujúcu ekvivalentnú formuláciu tvrdenia o existencii priesečníka výšok ľubovoľného trojuholníka ABC: Ak pre nejaký bod H roviny trojuholníka ABC platí $HB \perp AC$ a $HC \perp AB$, tak buď $H = A$, alebo $HA \perp BC$.
D1. Dokážte implikáciu z úlohy N3 metódou obvodových uhlov, aspoň pre prípad ostrouhlého trojuholníka ABC.
D2. V trojuholníku ABC platí $|AB| \neq |AC|$. Nech S je taký bod osi uhla BAC, pre ktorý platí $|SB| = |SC|$. Dokážte, že bod S leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.
D3. V trojuholníku ABC so stredom I kružnice vpísanej platí $|AB| < |AC|$. Nech D je bod strany AC taký, že $|AB| = |AD|$. Dokážte, že body B, C, D, I ležia na jednej kružnici.

3. *Ak sú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla, aký je najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňajúce úlohy:

Vo všetkých úlohách budú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla.

N1. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$.

N2. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami ab, bc, ca, abc.

N3. Určte najmenší počet rôznych čísel medzi číslami $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v prípade, keď navyše sú čísla a a b rôzne od 1?

N4. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami ab, ac, $a+b$, $a+c$.

D1. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+2b$, $b+2c$, $c+2a$.

D2. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, $ab+1$, $bc+1$, $ca+1$, abc.

D3. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \quad \frac{a+b+c}{3}, \quad \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

4. *Najväčšieho deliteľa d prirodzeného čísla $n>1$ s vlastnosťou $d<n$ nazveme jeho superdeliteľom.*

a) Dokážte, že každé prirodzené číslo $d>1$ je superdeliteľom iba konečného počtu čísel.

b) Označme $s(d)$ súčet všetkých čísel, ktorých superdeliteľom je dané číslo $d>1$. Rozhodnite, či existuje nepárne číslo $d>1$ také, že $s(d)$ je násobkom čísla 2 020.

(Michal Rolínek)

Návodné a doplňajúce úlohy:

Pripomeňme, že prvočiniteľom čísla n nazývame každé prvočíslo, ktoré číslo n delí.

N1. Uvedomte si, že superdeliteľom daného čísla $n>1$ je číslo $\frac{n}{p}$, pričom p je najmenší prvočiniteľ čísla n.

N2. Určte všetky prirodzená čísla, ktorých superdeliteľom je číslo 2.

N3. Určte všetky prirodzené čísla, ktorých superdeliteľom je číslo 7.

D1. Nájdite všetky prirodzené čísla $n>1$ také, že keď k nim pripočítame ich superdeliteľa, dostaneme súčet 2 020.

D2. Ktoré z čísel $2, 3, \ldots, 20$ je superdeliteľom najväčšieho počtu čísel?

D3. Ktoré prirodzené číslo najbližšie k číslu 2 020 má svojho superdeliteľa medzi číslami $1, 2, 3, \ldots, 45$?

D4. Ktoré prirodzené číslo najbližšie k číslu 2 020 má svojho superdeliteľa medzi číslami $2, 3, \ldots, 45$?

5. *V trojuholníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupne stredy jeho strán BC, CA, AB. Dokážte, že pre ľubovoľný bod X rôzny od bodov S_a, S_b, S_c platí*

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(*Patrik Bak*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zoznámte sa s Apollóniovými kružnicami a ich konštrukciami. Sú to množiny bodov významnej vlastnosti, ktorá je v nasledujúcom tvrdení určená parametrom λ a bodmi P a Q: Majme dané kladné reálne číslo $\lambda \neq 1$ a dva rôzne body P a Q v rovine ϱ. Potom platí, že množinou všetkých bodov $X \in \varrho$, $X \neq Q$, ktoré vyhovujú rovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je isté kružnica. Táto (Apollóniova) kružnica je kružnica nad priemerom MN, pričom M a N sú tie dva body priamky PQ, pre ktoré rovnica (1) po dosadení $X = M$, resp. $X = N$ sa zmení na platnú rovnosť.

N2. Majme dané reálne číslo $\lambda > 1$ a dva rôzne body P a Q v rovine ϱ. Dokážte, že množinou všetkých bodov $X \in \varrho$, $X \neq Q$, ktoré vyhovujú nerovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} > \lambda,$$

je vnútro kruhu ohraničeného Apollóniovou kružnicou, ktorá je určená rovnicou (1) z úlohy N1.

D1. V rovine ϱ je daná úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo priamky BC také, že veľkosti výšok v_b, v_c na strany AC, AB trojuholníka ABC sú v pomere 1 : 2. Dokážte, že všetky tieto body A ležia na jednej kružnici.

D2. V rovine ϱ je daná úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo priamky BC také, že veľkosti ťažníc t_b, t_c na strany AC, AB trojuholníka ABC sú v pomere 1 : 2. Dokážte, že všetky tieto body A ležia na jednej kružnici.

D3. V rovine sú dané dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, pričom $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Nájdite množinu všetkých bodov X, ktoré neležia na priamke S_1S_2 a majú tú vlastnosť, že úsečky S_1X, S_2X pretínajú postupne kružnice k_1, k_2 v bodoch, ktorých vzdialenosti od priamky S_1S_2 sa rovnajú.

D4. V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.

6. *Majme 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek vieme pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne zasvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)?*

(*Martin Melicher*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

Vo všetkých úlohách pracujeme s pojmami „žiarovka“ a „prepínač“ vo význame zo súťažnej úlohy.

N1. Určte počet možných stavov rozsvietenia žiaroviek 1, 2, 3 a 4, ktoré možno dosiahnuť použitím prepínačov $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ a $\{3, 4\}$ (napr. prepínač $\{3, 4\}$ vždy prepne práve žiarovky 3 a 4).

N2. Dokážte, že ak máme n prepínačov, pričom n je prirodzené číslo, tak postupným prepínaním môžeme dosiahnuť nanajvýš 2^n rôznych stavov rozsvietenia (vrátane pôvodného).

N3. Dokážte, že ak by v súťažnej úlohe bol cieľ pozmenený na možnosť rozsvietiť každú trojicu žiaroviek, tak pri jeho splnení by bolo možné rozsvietiť každú jednotlivú žiarovku.

N4. Koľko má daná n prvková množina tých podmnožín, ktoré majú párny počet prvkov?

D1. Riešte súťažnú úlohu so 70 žiarovkami s pozmenenou podmienkou, že máme byť schopní rozsvietiť každú $2k$-ticu žiaroviek, pričom k je dané prirodzené číslo z intervalu $\langle 3, 34\rangle$.

D2. Riešte súťažnú úlohu so 70 žiarovkami s pozmenenou podmienkou, že máme byť schopní rozsvietiť každú $(2k-1)$-ticu žiaroviek, pričom k je dané prirodzené číslo z intervalu $\langle 2, 35\rangle$.

Na nasledujúcich stranách nájdete tie isté návodné a doplňajúce úlohy ešte raz, avšak doplnené o výsledky s náznakmi riešení či o odkazy na náš archív.

1. *Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je*

a) päť;

b) sedem. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad troch prvočísel. [Riešenie neexistuje. Súčin vyhovujúcich troch prvočísel je násobok čísla $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, takže tieto prvočísla musia byť 3, 5 a 7. Pritom však $3 \cdot 5 \cdot 7 \neq 105 \cdot (3 + 5 + 7)$.]

N2. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad štyroch prvočísel. [Riešenie neexistuje. Podobne ako v N1 tri z prvočísel musia byť 3, 5, 7 a pre štvrté prvočíslo p má platiť rovnica $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot p = 105 \cdot (3 + 5 + 4 + p)$, ktorú zjavne žiadne prvočíslo p nesplĺňa.]

N3. Nájdite všetky trojice prvočísel také, že ich súčin je sedemnásobkom ich súčtu. [Úloha má jediné riešenie, trojicu 3, 5, 7. Podobne ako v N1 dokážte, že jedno z prvočísel je 7. Pre zvyšné dve, označme ich p a q, má platiť $7pq = 7(p+q+7)$, čo upravíme postupne na $pq = p + q + 7$, ďalej na $p(q - 1) = (q - 1) + 8$ a napokon na $(p-1)(q-1) = 8$. Pri označení takom, že $p \geqq q$, čiže $p-1 \geqq q-1$, máme možnosti $(p - 1, q - 1) = (8, 1)$ alebo $(p - 1, q - 1) = (4, 2)$. Iba druhá vedie na dvojicu prvočísel.]

N4. Nájdite všetky celé čísla x a y, pre ktoré $3xy = 5x + 7y + 1$. [Štyri riešenia (x, y): $(-4, 1)$, $(2, -11)$, $(3, 8)$, $(15, 2)$. Po vynásobení tromi dostaneme rovnicu $9xy = 15x+21y+3$. Teraz už ju môžeme upraviť na súčinový tvar $(3x-a)(3y-$ $-b) = 3a+3b$ s vhodnými celými číslami a a b, konkrétne $(3x-7)(3y-5) = 38$. Ostáva rozobrať všetky možnosti rozkladu čísla 38 na súčin dvoch celých čísel.]

N5. Nájdite všetky prirodzené čísla x, y a z, pre ktoré platí $xyz = x + y + z + 2$. [Až na poradie tri riešenia: $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 2)$. Ak je nejaké z čísel x, y, z rovné 1, napríklad x, dostaneme rovnicu $yz = y + z + 3$ s riešeniami $(2, 5)$ a $(3, 3)$ (podľa postupu z N4). Ak je naopak $\min(x, y, z) \geqq 2$ a napríklad $z =$ $= \max(x, y, z)$, platí $x+y+z+2 \leqq 3z+2$ a súčasne $xyz \geqq 4z$. Z toho vyplýva $4z \leqq 3z + 2$, čiže $z \leqq 2$, takže je teda nutne $x = y = z = 2$, a to je naozaj riešenie.]

D1. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad šiestich prvočísel. [Riešenie neexistuje. Podobne ako v N1 usúdime, že zo šiestich prvočísel tri sú 3, 5 a 7, ostatné, ktoré označíme x, y a z, spĺňajú rovnicu $xyz = x + y + z + 15$. Ak je niektoré z prvočísel x, y, z rovné 2, postupom z riešenia N4 zistíme, že rovnica nemá prvočíselné riešenie. V opačnom prípade, keď $\min(x, y, z) \geqq 3$ a napríklad $z =$ $= \max(x, y, z)$, máme $9z \leqq xyz = x + y + z + 15 \leqq 3z + 15$, čiže $z \leqq 2{,}5$, a to je spor.]

D2. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad $n \geqq 8$ prvočísel. [Riešenie neexistuje pre žiadne $n \geqq 8$. Podobne ako v N1 sú tri prvočísla 3, 5 a 7, zvyšné označme $p_1, \dots, p_k$, pričom $k = n - 3$, teda $k \geqq 5$. Platí $p_1 \cdots p_k = p_1 + \cdots + p_k + 15$. Ak je napríklad $p_1 = \max(p_1, \dots, p_k)$, tak $2^{k-1}p_1 \leqq p_1 \cdots p_k = p_1 + \ldots + p_k +$ $+ 15 \leqq k \cdot p_1 + 15$, teda $p_1(2^{k-1} - k) \leqq 15$. Indukciou sa však ľahko ukáže, že pre každé $k \geqq 5$ platí $2^{k-1} - k \geqq 11$, odkiaľ $p_1(2^{k-1} - k) \geqq 2 \cdot 11 = 22$, čo odporuje skôr odvodenej nerovnosti.]

D3. Nájdite všetky prvočísla x, y, z spĺňajúce rovnicu $x^2+y^2+z^2 = x+y+z+18$. [Jediné riešenie $x = y = z = 3$. Nech najskôr niektoré z prvočísel x, y a z je rovné 2, napr. z. Potom platí $x^2 + y^2 = x + y + 16$. Ľahko overíme, že nemôže byť ani $x = 2$, a teda ani $y = 2$, a preto $\min(x, y) \geqq 3$. Vtedy $3x + 3y \leqq x^2 + y^2 = x + y + 16$, takže $x + y \leqq 8$, teda stačí otestovať dvojice (x, y) rovné $(3, 3)$ a $(5, 3)$, ktoré však nevedú k riešeniu. Prejdeme k druhému prípadu, keď $\min(x, y, z) \geqq 3$. Vtedy $3x + 3y + 3z \leqq x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$, takže $x + y + z \leqq 9$, teda nutne $x = y = z = 3$, čo je naozaj riešenie úlohy.]

D4. Nájdite všetky prvočísla x, y, z spĺňajúce rovnicu $xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35$. [Jediné riešenie $x = y = z = 5$. Ak je nejaké z prvočísel rovné 2 alebo 3, tak dosadením dostaneme rovnice podobné ako v N4, o ktorých sa rovnakým postupom presvedčíme, že nemajú žiadne prvočíselné riešenie. Predpokladajme preto ďalej, že $x \geqq y \geqq z \geqq 5$. Potom

$$5xy \leqq xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35 \leqq 3xy + 3x + 35,$$

odkiaľ $x(2y - 3) \leqq 35$. Zároveň však z $x \geqq 5$ a $2y - 3 \geqq 2 \cdot 5 - 3 = 7$ vyplýva opačná nerovnosť $x(2y - 3) \geqq 35$, takže nutne $x = y = 5$, a preto tiež $z = 5$, teda jediné možné riešenie je $x = y = z = 5$.]

---

2. *V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia na strane BC body D a E tak, že D je medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je taký bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokážte, že $|FB| = |FC|$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Uvedomte si, ako sa dokazuje školský poznatok, že osi strán ľubovoľného trojuholníka ABC sa pretínajú v jednom bode. [Označme O priesečník osí strán AB a AC. Podľa vlastnosti osí úsečiek nutne platí $|OA| = |OB|$ a $|OA| = |OC|$, takže $|OB| = |OC|$, čo naopak znamená, že bod O leží na osi strany BC.]

N2. Dokážete použitím poznatku o osiach strán z úlohy N1 odvodiť iný školský poznatok, že aj výšky ľubovoľného trojuholníka ABC sa (ako priamky) pretínajú v jednom bode? [Trojuholník ABC doplňte trikrát na rovnobežník $ABA'C$, $BCB'A$, resp. $CAC'B$. Potom body A, B, C sú stredy strán trojuholníka $A'B'C'$. Osi jeho strán sa pretínajú v jednom bode (podľa úlohy N1) a ležia na nich výšky pôvodného trojuholníka ABC.]

N3. Uvedomte si nasledujúcu ekvivalentnú formuláciu tvrdenia o existencii priesečníka výšok ľubovoľného trojuholníka ABC: Ak pre nejaký bod H roviny trojuholníka ABC platí $HB \perp AC$ a $HC \perp AB$, tak buď $H = A$, alebo $HA \perp BC$. [Bod H je priesečníkom dvoch výšok trojuholníka ABC a každá z relácií $H = A$, $HA \perp BC$ znamená, že bod H leží aj na tretej výške z vrcholu A.]

D1. Dokážte implikáciu z úlohy N3 metódou obvodových uhlov, aspoň pre prípad ostrouhlého trojuholníka ABC. [Nech teda $HB \perp AC$, $HC \perp AB$. Označme A' priesečník AH a BC, B' priesečník BH a AC, a C' priesečník CH a AB. Štvoruholníky $AC'HB'$ a $BC'B'C$ sú tetivové vďaka pravým uhlom $\angle AB'H$, $\angle HC'A$, $\angle BC'C$, $\angle BB'C$. Preto $|\angle BAA'| = |\angle C'AH| = |\angle C'B'H| = |\angle C'B'B| = |\angle C'CB|$. Trojuholníky BAA', BCC' sa preto zhodujú v dvoch vnútorných uhloch, takže sa zhodujú aj v treťom z nich: $|\measuredangle AA'B| = |\measuredangle BC'C| = 90°$. Odtiaľ už $HA \perp BC$.]

D2. V trojuholníku ABC platí $|AB| \neq |AC|$. Nech S je taký bod osi uhla BAC, pre ktorý platí $|SB| = |SC|$. Dokážte, že bod S leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. [Pracovať priamo so zadaným bodom S je ťažké, a tak zvážime pomocný bod S', ktorým je priesečník $S' \neq A$ osi uhla BAC s kružnicou opísanou. Ako je dobre známe, platí $|S'B| = |S'C|$ (vyplýva to zo zhodnosti obvodových uhlov $S'AB$ a $S'AC$). Vďaka podmienke $|AB| \neq |AC|$ je spoločný bod S osi uhla BAC a osi strany BC jediný, a tak platí $S' = S$.]

D3. V trojuholníku ABC so stredom I kružnice vpísanej platí $|AB| < |AC|$. Nech D je bod strany AC taký, že $|AB| = |AD|$. Dokážte, že body B, C, D, I ležia na jednej kružnici. [Polpriamka AI je os uhla BAC, a teda aj os uhla BAD, ktorá je vďaka podmienke $|AB| = |AD|$ zároveň aj osou úsečky BD. Bod I je teda pre trojuholník BCD takým bodom osi uhla BCD, pre ktorý platí $|IB| = |ID|$. Keďže navyše $|CB| \neq |CD|$ (lebo $|CD| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| < |CB|$ podľa trojuholníkovej nerovnosti), je možné použiť výsledok úlohy D2, podľa ktorého leží bod I na kružnici opísanej trojuholníku BCD. Iné riešenie: Stačí ukázať, že oba uhly BIC a BDC majú veľkosť $90° + \frac{1}{2}\alpha$, kde ako zvyčajne $\alpha = |\measuredangle BAC|$.]

---

3. *Ak sú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla, aký je najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?* (*Patrik Bak*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

Vo všetkých úlohách budú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla.

N1. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$. [Jedná sa vždy o štyri rôzne čísla. Určite možno predpokladať, že $0 < a < b < c$. Potom ale $a+b < a+c < b+c < a+b+c$.]

N2. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami ab, bc, ca, abc. [Tri. Určite možno predpokladať, že $0 < a < b < c$. Potom ale $ab < ac < bc$, takže aspoň tri rôzne hodnoty existujú vždy. Práve tri rôzne hodnoty to budú práve vtedy, keď číslo abc bude rovné jednému z čísel ab, ac, bc, t. j. práve keď bude $1 \in \{a, b, c\}$.]

N3. Určte najmenší počet rôznych čísel medzi číslami $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v prípade, keď navyše sú čísla a a b rôzne od 1? [Tri a možný počet to je aj v prípade $a \neq 1 \neq b$. Vzhľadom na symetriu zadania v premenných a a b môžeme predpokladať, že $a < b$. Keďže $b < b+1$, sú a, b, $b+1$ tri rôzne hodnoty. Aby boli práve tri v celej pätici, musí platiť $a+1 = b$ a v prípade $a \neq 1 \neq b$ ešte musí byť $ab = b+1$. Obom rovnostiam vyhovujú čísla $a = \sqrt{2}$ a $b = \sqrt{2}+1$, ktoré sú rôzne od 1 a pre ktoré sú v pätici naozaj tri rôzne hodnoty.]

N4. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami ab, ac, $a+b$, $a+c$. [Tri. Keďže $ab \neq ac$ a aj $a+b \neq a+c$, máme aspoň 2 rôzne hodnoty. Pripusťme, že máme práve 2 rôzne hodnoty v celej štvorici. Potom máme dve možnosti: buď $ab = a+b$ a $ac = a+c$, alebo $ab = a+c$ a $ac = a+b$. V prvom prípade po odčítaní oboch rovností dostaneme $(a-1)(b-c) = 0$, odkiaľ $a = 1$, a to je spor s $ab = a+b$. V druhom prípade po podobnom odčítaním dostaneme $(a+1)(b-c)=0$, a to je tiež spor. Preto vždy máme aspoň 3 rôzne hodnoty, a tento počet neprekročíme, ak bude platiť $ab=a+b$, čo spĺňa napríklad trojica $(a,b,c)=(3,\frac{3}{2},1)$. Dodajme, že postup sme mohli zjednodušiť využitím symetrie zadania v premenných b a c, vďaka ktorej môžeme predpokladať, že $b<c$. Vtedy platí $ab<ac$ a $a+b<a+c$, takže stačí rozobrať iba prvý z dvoch vyššie rozlíšených prípadov.]

D1. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+2b$, $b+2c$, $c+2a$. [Dve. Úloha sa nezmení, keď trojicu (a,b,c) zameníme ľubovoľnou z trojíc (b,c,a) a (c,a,b). Preto môžeme predpokladať, že platí $a=\max\{a,b,c\}$. Potom $2a>b+c$, čiže $c+2a>b+2c$. Tým pádom v našej trojici máme aspoň dve rôzne hodnoty. Pre nájdenie trojice s práve dvoma rôznymi hodnotami položme napríklad $c+2a=a+2b$. To dáva $a=2b-c$. Teda napríklad pre $c=1$, $b=2$ vyjde $a=3$. Vtedy $(a+2b,b+2c,c+2a)=(7,4,7)$.]

D2. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, $ab+1$, $bc+1$, $ca+1$, abc. [Štyri. Vďaka symetrii môžeme predpokladať, že $a>b>c$. Potom $a+b>a+c>b+c$ a $ab+1>ac+1>bc+1$, takže v zadanej sedmici sú vždy aspoň tri rôzne hodnoty. Keby boli práve tri, tak by nutne platilo $a+b=ab+1$, $a+c=ac+1$ a $b+c=bc+1$. To upravíme na $(a-1)(b-1)=0$, $(a-1)(c-1)=0$ a $(b-1)(c-1)=0$. Nutne sa teda dve z čísel a, b, c rovnajú 1, a to je spor. V našej sedmici teda máme vždy aspoň 4 rôzne hodnoty, a tento počet neprekročíme, keď napríklad zvolíme $a=1$ a budeme požadovať, aby platilo $bc=b+c$, čo napríklad spĺňa dvojica $(b,c)=\left(3,\frac{3}{2}\right)$.]

D3. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},\quad \frac{a+b+c}{3},\quad \sqrt[3]{abc},\quad \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

[Štyri. Jednotlivé čísla sú rôzne druhy priemerov zostavené pre tú istú trojicu čísel a, b, c. Označme zľava doprava ich hodnoty K, A, G, H podľa ich názvov *kvadratický*, resp. *aritmetický*, resp. *geometrický*, resp. *harmonický* priemer. Ako je známe, medzi týmito priemermi pre ľubovoľnú trojicu kladných čísel a, b, c platia nerovnosti $K\geqq A\geqq G\geqq H$, pričom všetky nerovnosti sú ostré s výnimkou prípadu, keď platí $a=b=c$. (Dôkazy týchto nerovností možno nájsť v brožúre *A. Kufner: Nerovnosti a odhady*, dostupnej na www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403877.)]

---

4. *Najväčšieho deliteľa d prirodzeného čísla $n>1$ s vlastnosťou $d<n$ nazveme jeho superdeliteľom.*

a) Dokážte, že každé prirodzené číslo $d>1$ je superdeliteľom iba konečného počtu čísel.

b) Označme $s(d)$ súčet všetkých čísel, ktorých superdeliteľom je dané číslo $d>1$. Rozhodnite, či existuje nepárne číslo $d>1$ také, že $s(d)$ je násobkom čísla 2 020.

(Michal Rolínek)

Návodné a doplňajúce úlohy:

Pripomeňme, že prvočiniteľom čísla n nazývame každé prvočíslo, ktoré číslo n delí.

N1. Uvedomte si, že superdeliteľom daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, pričom p je najmenší prvočiniteľ čísla n. [Ak je d deliteľ čísla n, je jeho deliteľom aj číslo $\frac{n}{d}$. Najmenšie dva delitele n sú 1 a p, ktorým zodpovedajú dva jeho najväčšie delitele $\frac{n}{1}$ a $\frac{n}{p}$.]

N2. Určte všetky prirodzená čísla, ktorých superdeliteľom je číslo 2. [Jedine číslo 4. Každé hľadané číslo n je nutne párne, a tak je číslo 2 jeho najmenší prvočiniteľ. Podľa výsledku N1 teda platí $2 = \frac{n}{2}$, a preto $n = 4$.]

N3. Určte všetky prirodzené čísla, ktorých superdeliteľom je číslo 7. [14, 21, 35 a 49. Každé hľadané n je deliteľné siedmimi a podľa výsledku N1 má platiť $7 = \frac{n}{p}$, pričom p je najmenší prvočiniteľ n, takže $p \leqq 7$, čiže $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.]

D1. Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, že keď k nim pripočítame ich superdeliteľa, dostaneme súčet 2 020. [1 515 a 1 919. Ak je p najmenší prvočiniteľ čísla n, tak $n = dp$, pričom d je superdeliteľ n. Má platiť $dp + d = 2020$, čiže $d(p+1) = 2020$, takže ostáva prebrať všetky delitele d čísla 2 020 s prvočíselným rozkladom $2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Pre $d = 1$ vychádza $p = 2019$, čo nie je prvočíslo. Keby bolo $d > 1$ párne, bolo by párne aj číslo n, a tak by bolo $p = 2$, a teda $d(2 + 1) = 2020$, čo nie je možné. Ostávajú preto možnosti $d \in \{5, 101, 505\}$. Postupným dosadením do $d(p + 1) = 2020$ zistíme, že riešenie dáva iba hodnota $d = 101$, ktorej zodpovedá $p = 19$, a hodnota $d = 505$, pre ktorú vychádza $p = 3$. (V oboch prípadoch je naozaj nájdené p najmenším prvočiniteľom súčinu $n = dp$.)]

D2. Ktoré z čísel $2, 3, \ldots, 20$ je superdeliteľom najväčšieho počtu čísel? [Číslo 19. Hľadáme to číslo $n \in \{2, 3, \ldots, 20\}$, pre ktoré existuje čo najviac prvočísel p takých, že najmenší prvočiniteľ čísla np je práve p. Keďže $n > 1$, musí pre každé prvočíslo p s uvedenou vlastnosťou platiť $p \leqq n$, a teda aj $p \leqq 20$, takže takých prvočísel nemôže byť viac, ako je všetkých prvočísel do 20, ktorých je 8. Aby ich bolo práve 8, musel by aj súčin $19n$ mať najmenšieho prvočiniteľa 19, čo z uvažovaných čísel n spĺňa jedine $n = 19$. Toto číslo je naozaj superdeliteľom ôsmich čísel $19 \cdot 2$, $19 \cdot 3$, $19 \cdot 5$,…, $19 \cdot 19$.]

D3. Ktoré prirodzené číslo najbližšie k číslu 2 020 má svojho superdeliteľa medzi číslami $1, 2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 2 017. Číslo 1 je superdeliteľom každého prvočísla. Najbližšie prvočíslo k číslu 2 020 je 2017. Výpočtom superdeliteľov čísel $2\,018, 2\,019, \ldots, 2\,023$ zistíme, že žiadny z nich nepatrí medzi čísla zo zadania.]

D4. Ktoré prirodzené číslo najbližšie k číslu 2 020 má svojho superdeliteľa medzi číslami $2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 1 849. Najväčším číslom n s daným superdeliteľom $d > 1$ je číslo $n = dp$, pričom p je najmenší prvočiniteľ čísla d. Z toho vyplýva, že ak $1 < d \leqq 43$, pre každé číslo n so superdeliteľom d platí $n \leqq d^2 \leqq 43^2 = 1\,849$, pritom číslo 1 849 má za superdeliteľa prvočíslo 43. Ďalej najväčšie číslo so superdeliteľom 44 je rovné $44 \cdot 2 = 88$, najväčšie číslo so superdeliteľom 45 je rovné $45 \cdot 3 = 135$.]

---

5. *V trojuholníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupne stredy jeho strán BC, CA, AB.*

Dokážte, že pre ľubovoľný bod X rôzny od bodov S_a, S_b, S_c platí

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(*Patrik Bak*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zoznámte sa s Apollóniovými kružnicami a ich konštrukciami. Sú to množiny bodov významnej vlastnosti, ktorá je v nasledujúcom tvrdení určená parametrom λ a bodmi P a Q: Majme dané kladné reálne číslo $\lambda \neq 1$ a dva rôzne body P a Q v rovine ϱ. Potom platí, že množinou všetkých bodov $X \in \varrho$, $X \neq Q$, ktoré vyhovujú rovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je isté kružnica. Táto (Apollóniova) kružnica je kružnica nad priemerom MN, pričom M a N sú tie dva body priamky PQ, pre ktoré rovnica (1) po dosadení $X = M$, resp. $X = N$ sa zmení na platnú rovnosť. [Pozri časť I kapitoly 5 brožúry *S. Horák: Kružnice*, dostupnej na dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589. Iný podrobný výklad nájdete v návodných úlohách k úlohe 63--A--I--6.]

N2. Majme dané reálne číslo $\lambda > 1$ a dva rôzne body P a Q v rovine ϱ. Dokážte, že množinou všetkých bodov $X \in \varrho$, $X \neq Q$, ktoré vyhovujú nerovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} > \lambda,$$

je vnútro kruhu ohraničeného Apollóniovou kružnicou, ktorá je určená rovnicou (1) z úlohy N1. [Uvážte dve Apollóniove kružnice

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_1 > 1 \quad \text{a} \quad \frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_2 > 1.$$

Prvá z nich je kružnica nad priemerom M_1N_1, druhá je kružnica nad priemerom M_2N_2, pričom M_1N_1 a M_2N_2 sú isté úsečky na priamke PQ. Tvrdenie úlohy N2 bude dokázané, keď vysvetlíme, prečo v prípade $\lambda_1 < \lambda_2$ ležia body M_2, N_2 vnútri úsečky M_1N_1.]

D1. V rovine ϱ je daná úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo priamky BC také, že veľkosti výšok v_b, v_c na strany AC, AB trojuholníka ABC sú v pomere $1:2$. Dokážte, že všetky tieto body A ležia na jednej kružnici. [Pre obsah S trojuholníka ABC platí $2S = b \cdot v_b = c \cdot v_c$, a teda $b : c = v_c : v_b = 2 : 1$. Vyhovujúce body A teda ležia na Apollóniovej kružnici $|CX|/|BX| = 2$.]

D2. V rovine ϱ je daná úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo priamky BC také, že veľkosti ťažníc t_b, t_c na strany AC, AB trojuholníka ABC sú v pomere $1:2$. Dokážte, že všetky tieto body A ležia na jednej kružnici. [Pre ťažisko G trojuholníka ABC platí $|BG| = \frac{2}{3}t_b$ a $|CG| = \frac{2}{3}t_c$, takže $|BG| : |CG| = 1 : 2$. Všetky body G teda ležia na jednej Apollóniovej kružnici, preto všetky body A ležia na jej obraze v rovnoľahlosti so stredom v strede úsečky BC, ktorá má koeficient 3.]

D3. V rovine sú dané dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, pričom $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Nájdite množinu všetkých bodov X, ktoré neležia na priamke S_1S_2 a majú tú vlastnosť, že úsečky S_1X, S_2X pretínajú postupne kružnice k_1, k_2 v bodoch, ktorých vzdialenosti od priamky S_1S_2 sa rovnajú. [63--A--II--2]

D4. V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. [63--A--I--6]

---

6. *Majme 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek vieme pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne zasvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)?* (*Martin Melicher*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

Vo všetkých úlohách pracujeme s pojmami „žiarovka“ a „prepínač“ vo význame zo súťažnej úlohy.

N1. Určte počet možných stavov rozsvietenia žiaroviek 1, 2, 3 a 4, ktoré možno dosiahnuť použitím prepínačov $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$ a $\{3,4\}$ (napr. prepínač $\{3,4\}$ vždy prepne práve žiarovky 3 a 4). [Štyri stavy (vrátane toho pôvodného). Uvedomme si, že poradie stláčania prepínačov v danej sérii nemá vplyv na celkový výsledok. Tiež nemá zmysel žiadny prepínač použiť v jednej sérii viackrát. Stačí teda nájsť výsledný stav pre každú z 2^3 podmnožín danej množiny 3 prepínačov, ktoré môžeme stlačiť, a potom spočítať, koľko týchto stavov je rôznych. Výhodné je pritom výsledné stavy určovať takto: $\{1,2,3\} + \{3,4\} \sim \{1,2,4\}$. Z toho príkladu vidíme, že prepínač $\{1,2,4\}$ je možné v zadaní úlohy vynechať.]

N2. Dokážte, že ak máme n prepínačov, pričom n je prirodzené číslo, tak postupným prepínaním môžeme dosiahnuť nanajvýš 2^n rôznych stavov rozsvietenia (vrátane pôvodného). [Podľa úvahy z riešenia N1 platí, že počet dosiahnuteľných stavov neprevyšuje počet všetkých podmnožín danej množiny prepínačov.]

N3. Dokážte, že ak by v súťažnej úlohe bol cieľ pozmenený na možnosť rozsvietiť každú trojicu žiaroviek, tak pri jeho splnení by bolo možné rozsvietiť každú jednotlivú žiarovku. [Na rozsvietenie jedinej zvolenej žiarovky a vyberieme tri ďalšie žiarovky b, c, d a aplikujeme postupne 3 série rozsvietenia, a to pre trojice (a,b,c), (a,b,d) a (a,c,d).]

N4. Koľko má daná n prvková množina tých podmnožín, ktoré majú párny počet prvkov? [2^{n-1} podmnožín. Postupujeme podobne ako pri známom dôkaze, že počet *všetkých* podmnožín je 2^n: Prvých $n-1$ prvkov môžeme do konštruovanej podmnožiny buď zaradiť, alebo nezaradiť, takže máme 2^{n-1} možností. Po tejto procedúre máme vybraný buď párny, alebo nepárny počet prvkov, a tak podľa toho k nim nezaradíme, resp. zaradíme posledný n-tý prvok. Takto dostaneme práve 2^{n-1} vyhovujúcich podmnožín. Ostáva si uvedomiť, že opísaným postupom dostaneme *každú* vyhovujúcu podmnožinu.]

D1. Riešte súťažnú úlohu so 70 žiarovkami s pozmenenou podmienkou, že máme byť schopní rozsvietiť každú $2k$-ticu žiaroviek, pričom k je dané prirodzené číslo z intervalu $\langle 3, 34\rangle$. [Taká úloha je ekvivalentná so súťažnou úlohou. Nech ďalej (a,b) je ľubovoľná dvojica žiaroviek a c_i označuje žiarovky rôzne od a,

b, pričom $c_i \neq c_j$ pre $i \neq j$. Ak možno rozsvietiť $2k$-tice $(a, c_1, \dots, c_{2k-1})$ a $(b, c_1, \dots, c_{2k-1})$, tak možno rozsvietiť aj dvojicu (a, b), a teda aj ľubovoľnú štvoricu (po dvoch dvojiciach). Naopak, ak možno rozsvietiť štvorice (a, c_1, c_2, c_3) a (b, c_1, c_2, c_3), možno rozsvietiť aj dvojicu (a, b), takže potom možno rozsvietiť aj každú $2k$-tici (po k dvojiciach).]

D2. Riešte súťažnú úlohu so 70 žiarovkami s pozmenenou podmienkou, že máme byť schopní rozsvietiť každú $(2k-1)$-ticu žiaroviek, pričom k je dané prirodzené číslo z intervalu $\langle 2, 35 \rangle$. [70 prepínačov. Podobne ako v riešení D1 úvahou o dvoch $(2k-1)$-ticiach $(a, c_1, \dots, c_{2k-2})$ a $(b, c_1, \dots, c_{2k-2})$ zistíme, že možno rozsvietiť každú dvojicu (a, b). Teraz úvahou o jednej $(2k-1)$-tici $(a, c_1, \dots, c_{2k-2})$ a $k-1$ dvojiciach (c_1, c_2),..., (c_{2k-3}, c_{2k-2}) zistíme, že možno rozsvietiť ľubovoľnú žiarovku a, a teda aj každú z 2^{70} množín žiaroviek, takže podľa výsledku úlohy N2 potrebujeme aspoň 70 prepínačov. 70 prepínačov ale stačí – jeden prepínač na každú žiarovku.]