70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Návodné úlohy domáceho kola kategórie B*

V prvej časti textu pod zadaním každej zo šiestich súťažných úloh nájdete zadania návodných a doplňajúcich úloh. Tie isté úlohy aj s riešeniami (resp. odpoveďami a náznakmi riešení či odkazmi na riešenia v našom archíve) nájdete v druhej časti textu.

---

1. *Z cifier 0 až 9 vytvoríme dvojciferné čísla AB, CD, EF, GH, IJ, pričom každú cifru použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať súčet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a ktoré hodnoty to sú. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojciferné čísla.)* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Z dvoch rôznych cifier A, B vytvoríme dvojciferné čísla AB a BA. Dokážte, že ich rozdiel je deliteľný 9.

N2. Situáciu zo súťažnej úlohy „zmenšíme“. Z cifier 1, 2, 3, 4 vytvoríme dvojciferné čísla AB, CD, pričom každú cifru použijeme práve raz.
a) Nájdite najmenšiu možnú a najväčšiu možnú hodnotu $AB + CD$.
b) Zistite najmenší možný kladný rozdiel dvoch takto vytvorených čísel $AB + CD$.

N3. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vyberieme tri rôzne. Zdôvodnite, že ich súčet môže nadobúdať ktorúkoľvek celočíselnú hodnotu od 6 do 15.

D1. Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách?

D2. Nájdite všetky osemciferné čísla také, z ktorých po vyškrtnutí niektorej štvorice susedných cifier dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie.

---

2. *Aká je najväčšia možná hodnota výrazu $xy - x^3y - xy^3$, ak sú x, y kladné reálne čísla? Pre ktoré x, y sa táto hodnota dosahuje?* (Mária Dományová, Patrik Bak)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla u, v platí nerovnosť $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u + v)$, pritom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $u = v$.

N2. Nájdite najväčšiu hodnotu výrazu a) $t(1 - t)$, b) $uv(1 - uv)$, c) $(u^2 + v^2)(1 - u^2 - v^2)$. Vo všetkých výrazoch písmená označujú ľubovoľné reálne čísla.

D1. Pre reálne čísla a, b nájdite najväčšiu možnú hodnotu výrazu
$$\frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

D2. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a + b = 2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu
$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$.

D4. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V=\frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}.$$

---

3. *V ostrouhlom trojuholníku ABC sú AA' a BB' jeho výšky. Kolmý priemet bodu A' na výšku BB' označme D. Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi B, C, D pretína stranu AC v jej vnútornom bode E. Dokážte, že $|DE|=|AA'|$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ostrouhlý rôznostranný trojuholník ABC je svojimi výškami rozdelený na šesť neprekrývajúcich sa trojuholníkov. Zistite, či niektoré z nich sú podobné. Ak áno, existujú medzi nimi tri navzájom podobné trojuholníky?

N2. Na kružnici so stredom O sú dané body B a C také, že $|\measuredangle BOC|=120°$. Zvoľme bod A na dlhšom oblúku BC a označme $|\measuredangle AOB|=\delta$.
a) Zistite veľkosť uhla BAC, keď $\delta=140°$.
b) Zistite, ako máme voliť uhol δ, aby bol uhol BAC čo najväčší.
c) Na kratšom oblúku BC zvolíme bod A'. Zistite, ako máme voliť polohy bodov A, A' (oba ležia na danej kružnici), aby súčet $|\measuredangle BAC|+|\measuredangle BA'C|$ bol čo najväčší.

D1. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme A', B', C' päty jeho výšok a H jeho ortocentrum (priesečník výšok AA', BB', CC'). Nájdite všetkých 6 tetivových štvoruholníkov s vrcholmi v bodoch A, B, C, A', B', C', H.

D2. V rovine sú dané kružnice m a n, ktoré sa pretínajú v bodoch K a L. Na kružnici m ležia body A, D, K, L a na kružnici n ležia body B, C, K, L v týchto poradiach, pričom body A, L, B ležia na priamke a body C, K, D ležia na inej priamke v týchto poradiach. Dokážte, že $AD \parallel BC$.

D3. Zvoľme ľubovoľné body A', B', C' vnútri strán BC, CA, AB trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ sa pretínajú v jednom bode.

---

4. *Zistite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra k má sústava rovníc*

$$|x+6|+2|y|=24,$$
$$|x+y|+|x-y|=2k$$

nepárny počet riešení v obore reálnych čísel. (Pavel Calábek)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V karteziánskej sústave súradníc Oxy znázornite množinu všetkých bodov $[x,y]$, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu a) $|x|+|y|=7$, b) $|x-3|+|y|=7$, c) $|x|+2|y|=10$.

N2. Rozmyslite si, ako v karteziánskej sústave súradníc Oxy vyzerá množina všetkých bodov $[x,y]$, ktorých súradnice spĺňajú

a) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$,
b) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$ a zároveň $|x+y| + |x-y| = 10$.

N3. Zdôvodnite, prečo pre ľubovoľnú hodnotu reálneho parametra k má sústava rovníc

$$|x+6| + 2|y| = 24,$$
$$|x+6| + |y| = k$$

párny počet riešení v obore reálnych čísel.

D1. Určte všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc

$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia určte.

D2. Použitím grafickej metódy a ďalej potom výpočtom určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$|x| + |y-1| = 1,$$
$$|x-1| + |y| = p,$$

pričom p je reálny parameter.

---

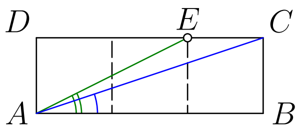
5. *Daný je pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Kolmica vedená bodom D na priamku DE pretína priamky CG a AB postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.* (*Marián Poturnay*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Rozmyslite si, že pravidelný sedemuholník je osovo súmerný a každá jeho uhlopriečka je rovnobežná s niektorou z jeho strán.

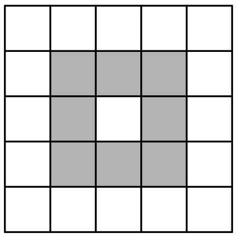
D1. Majme ostrouhlý trojuholník ABC so štandardne označenými uhlami. Predpokladajme, že platí $|AB| < |AC|$. Na strane AC zvoľme bod D tak, aby platilo $|\measuredangle CBD| = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Dokážte, že $|AB| + |CD| = |AC|$.

D2. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| = 3|BC|$ a na strane CD je zvolený bod E tak, že $|BC| = |CE|$. Dokážte, že $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle BAE| = 45°$.



---

6. *Na pláne s rozmermi 12×12 štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca 3×3 (na obr. 1 je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz?* (Jozef Rajník)



Obr. 1

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Súťažnú úlohu „zmenšíme“. Vyriešte postupne tri úlohy, v ktorých plán 12×12 nahradíme plánom a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6.

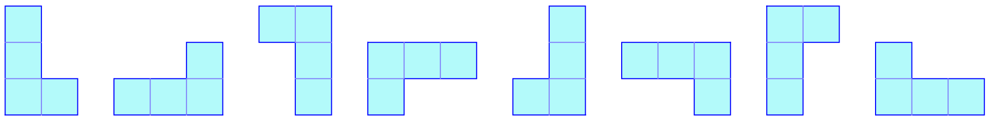
D1. Na pláne s rozmermi 6×6 štvorčekov sa nachádza loď tvaru štvorca 2×2. Zdôvodnite, že treba najmenej 9 výstrelov, aby sme mali istotu, že sme loď zasiahli.

D2. Určte, koľko je všetkých dvojíc políčok daného štvorca 4×4, ktorých zásahom dosiahneme s istotou aj zásah lode zo zadania súťažnej úlohy, ktorá je v tomto štvorci akokoľvek umiestnená.

D3. Dokážte, že podmienku súťažnej úlohy *je nemožné* splniť tak, že celý plán 12×12 rozdelíme na 9 štvorcov 4×4 a potom v každom z nich vystrelíme na dve políčka, a to na rovnakých dvoch miestach vo všetkých 9 štvorcoch.

D4. Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

D5. Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď majúca niektorý z tvarov na obrázku.



Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. a) Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode. b) Zdôvodnite, že sedem otázok vo všeobecnosti takú istotu nedáva.

Na nasledujúcich stranách nájdete tie isté návodné a doplňajúce úlohy ešte raz, avšak doplnené o výsledky s náznakmi riešení či o odkazy na náš archív.

1. *Z cifier* 0 *až* 9 *vytvoríme dvojciferné čísla* AB, CD, EF, GH, IJ, *pričom každú cifru použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať súčet* $AB + CD + EF + GH + IJ$ *a ktoré hodnoty to sú. (Zápisy typu* 07 *nepovažujeme za dvojciferné čísla.)* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Z dvoch rôznych cifier A, B vytvoríme dvojciferné čísla AB a BA. Dokážte, že ich rozdiel je deliteľný 9. [$AB - BA = (10 \cdot A + B) - (10 \cdot B + A) = 9(A - B)$.]

N2. Situáciu zo súťažnej úlohy „zmenšíme“. Z cifier 1, 2, 3, 4 vytvoríme dvojciferné čísla AB, CD, pričom každú cifru použijeme práve raz.

a) Nájdite najmenšiu možnú a najväčšiu možnú hodnotu $AB + CD$.

b) Zistite najmenší možný kladný rozdiel dvoch takto vytvorených čísel $AB + CD$.

[a) Minimum je 37, maximum je 73. Minimum, resp. maximum dostaneme, keď umiestnime najmenšie cifry 1 a 2 na pozície desiatok, resp. na pozície jednotiek. b) 9. Každé vytvorené číslo $AB + CD$ dáva po delení deviatimi rovnaký zvyšok ako číslo $A + B + C + D$ rovné $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, dáva teda zvyšok 1. Preto je rozdiel každých dvoch vytvorených čísel $AB + CD$ deliteľný deviatimi, teda hľadané minimum je kladným násobkom čísla 9. Že to nie je viac ako 9, ukazuje príklad $(12 + 43) - (12 + 34) = 9$.]

N3. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vyberieme tri rôzne. Zdôvodnite, že ich súčet môže nadobúdať ktorúkoľvek celočíselnú hodnotu od 6 do 15. [Nájsť najmenšiu a najväčšiu hodnotu nestačí. Je nutné opísať, ako skonštruovať ktorýkoľvek prípustný súčet, napríklad 13. Opis môže vyzerať ako algoritmus, ktorý prejde všetky súčty od 6 do 15. Keď začneme s trojicou 1, 2, 3, môžeme číslo 3 opakovane zväčšovať o jedna tak dlho, až dostaneme trojicu 1, 2, 6. Potom začneme zväčšovať číslo 2, až dostaneme 1, 5, 6. Nakoniec budeme zväčšovať číslo 1, až dostaneme 4, 5, 6, čím celkovo prejdeme všetky čísla od 6 do 15.]

D1. Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách? [61-C-II-2]

D2. Nájdite všetky osemciferné čísla také, z ktorých po vyškrtnutí niektorej štvorice susedných cifier dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie. [68-B-I-1]

2. *Aká je najväčšia možná hodnota výrazu* $xy - x^3y - xy^3$, *ak sú* x, y *kladné reálne čísla? Pre ktoré* x, y *sa táto hodnota dosahuje?* (Mária Dományová, Patrik Bak)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla u, v platí nerovnosť $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u + v)$, pritom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $u = v$. [Zrejme platí $\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \geqq 0$. Po roznásobení ľavej strany túto nerovnosť prepíšeme na tvar $u - 2\sqrt{uv} + v \geqq 0$, čo napokon upravíme na požadované $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u + v)$. Rovnosť v tejto nerovnosti nastane práve vtedy, keď $\sqrt{u} - \sqrt{v} = 0$, čo je ekvivalentné $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, teda aj $u = v$. *Poznámka.* Keďže výraz na ľavej strane nerovnosti je *geometrickým* priemerom dvoch nezáporných reálnych čísel u, v

a výraz na pravej strane je ich *aritmetickým* priemerom, nazýva sa uvedená nerovnosť *nerovnosťou medzi aritmetickým a geometrickým priemerom* dvoch nezáporných reálnych čísel, skrátene *AG-nerovnosť*. Podobná rovnako pomenovaná nerovnosť platí aj pre n-tice nezáporných čísel.]

N2. Nájdite najväčšiu hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Vo všetkých výrazoch písmená označujú ľubovoľné reálne čísla. [a) $\frac{1}{4}$. Ak sú obe čísla t a $1-t$ kladné, napíšte pre ne AG-nerovnosť. Rozmyslite si prípady, keď nie sú obe čísla kladné. Alternatívne možnosťou je úprava na štvorec: $t(1-t) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2}-t)^2$. b) $\frac{1}{4}$. Substitúcia $t = uv$ vedie na prípad a). c) $\frac{1}{4}$. Substitúcia $t = u^2+v^2$ vedie na prípad a).]

D1. Pre reálne čísla a, b nájdite najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

[Maximum je $\frac{1}{2}$ (pre $a=b$). Určite sa stačí obmedziť na prípad, keď $a>0$ a $b>0$. Použite AG-nerovnosť pre dvojicu čísel a^2 a b^2. Inak je možné vyjsť z nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$, upravenej na tvar $2ab \leqq a^2+b^2$.]

D2. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a+b=2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

[68-B-II-1]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$. [Sčítaním troch nerovností $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $b^2+c^2 \geqq 2bc$, $c^2+a^2 \geqq 2ca$ získame nerovnosť, ktorú potom stačí vydeliť dvoma.]

D4. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}.$$

[68-B-I-4]

---

3. *V ostrouhlom trojuholníku ABC sú AA' a BB' jeho výšky. Kolmý priemet bodu A' na výšku BB' označme D. Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi B, C, D pretína stranu AC v jej vnútornom bode E. Dokážte, že $|DE| = |AA'|$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ostrouhlý rôznostranný trojuholník ABC je svojimi výškami rozdelený na šesť neprekrývajúcich sa trojuholníkov. Zistite, či niektoré z nich sú podobné. Ak áno, existujú medzi nimi tri navzájom podobné trojuholníky? [Každý trojuholník je podobný s práve jedným z ostatných piatich trojuholníkov. Využite to, že sa jedná o pravouhlé trojuholníky, ktorých ostré vnútorné uhly pri stranách trojuholníka ABC dopĺňajú jeho vnútorné uhly do $90°$.]

N2. Na kružnici so stredom O sú dané body B a C také, že $|\angle BOC| = 120°$. Zvoľme bod A na dlhšom oblúku BC a označme $|\angle AOB| = \delta$.

a) Zistite veľkosť uhla BAC, keď $\delta = 140°$.

b) Zistite, ako máme voliť uhol δ, aby bol uhol BAC čo najväčší.

c) Na kratšom oblúku BC zvolíme bod A'. Zistite, ako máme voliť polohy bodov A, A' (oba ležia na danej kružnici), aby súčet $|\angle BAC| + |\angle BA'C|$ bol čo najväčší. [V rovnoramenných trojuholníkoch BOC, COA a AOB spočítajte uhly, alebo ich vyjadrite v závislosti od uhla δ. V a) vyjde $|\angle BAC| = 60°$, rovnako ako v b) nezávisle na voľbe δ. V c) vyjde súčet $180°$ nezávisle na polohe bodu A alebo A'. Tvrdenie c) má známe zovšeobecnenie: Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí jeho protiľahlých uhlov je $180°$.]

D1. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme A', B', C' päty jeho výšok a H jeho ortocentrum (priesečník výšok AA', BB', CC'). Nájdite všetkých 6 tetivových štvoruholníkov s vrcholmi v bodoch A, B, C, A', B', C', H. [Hľadajte pravé uhly a Tálesove kružnice: Body A', B' ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, takže štvoruholník $ABA'B'$ je tetivový a podobne $BCB'C'$ a $CAC'A'$. Body B', C' ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AH, takže štvoruholník $AB'HC'$ je tetivový a podobne $BC'HA'$ a $CA'HB'$.]

D2. V rovine sú dané kružnice m a n, ktoré sa pretínajú v bodoch K a L. Na kružnici m ležia body A, D, K, L a na kružnici n ležia body B, C, K, L v týchto poradiach, pričom body A, L, B ležia na priamke a body C, K, D ležia na inej priamke v týchto poradiach. Dokážte, že $AD \parallel BC$. [Označme $|\angle LBC| = \beta$. Potom $|\angle LKC| = 180° - \beta$, $|\angle LKD| = \beta$ a $|\angle LAD| = 180° - \beta$. Z rovnosti $|\angle LBC| + |\angle LAD| = 180°$ vyplýva $AD \parallel BC$.]

D3. Zvoľme ľubovoľné body A', B', C' vnútri strán BC, CA, AB trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ sa pretínajú v jednom bode. [O priesečníku dvoch kružníc ukážeme, že leží na tretej kružnici. Označme M napríklad priesečník kružníc opísaných trojuholníkom $AB'C'$ a $BC'A'$ a predpokladajme, že bod M leží vnútri trojuholníka ABC. Z tetivového štvoruholníka $AC'MB'$ vyplýva rovnosť $|\angle CB'M| = |\angle AC'M|$. Z tetivového štvoruholníka $BA'MC'$ vyplýva rovnosť $|\angle AC'M| = |\angle BA'M|$. Spolu dostávame rovnosť $|\angle CB'M| = |\angle BA'M|$, takže štvoruholník $CB'MA'$ je tetivový. Podobne sa rozoberú prípady, v ktorých bod M leží zvonka trojuholníka ABC. Bod M sa v literatúre označuje termínom *Miquelov bod.*]

---

4. *Zistite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra k má sústava rovníc*

$$|x + 6| + 2|y| = 24,$$
$$|x + y| + |x - y| = 2k$$

nepárny počet riešení v obore reálnych čísel. (*Pavel Calábek*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V karteziánskej sústave súradníc Oxy znázornite množinu všetkých bodov $[x, y]$, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu a) $|x| + |y| = 7$, b) $|x - 3| + |y| = 7$, c) $|x| + 2|y| = 10$. [a) V každom zo štyroch kvadrantov dostaneme rovnicu priamky, celkovou množinou je hranica štvorca s vrcholmi v bodoch $[7, 0]$,

$[0,7]$, $[-7,0]$, $[0,-7]$. b) Hranica štvorca posunutá o vektor $(3,0)$ oproti štvorcu z úlohy a). c) Hranica kosoštvorca s vrcholmi v bodoch $[10,0]$, $[0,5]$, $[-10,0]$, $[0,-5]$.]

N2. Rozmyslite si, ako v karteziánskej sústave súradníc Oxy vyzerá množina všetkých bodov $[x,y]$, ktorých súradnice spĺňajú
a) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$,
b) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$ a zároveň $|x+y|+|x-y|=10$.
[a) Jedná sa o prienik dvoch polrovín s hraničnými priamkami $x=y$, resp. $x=-y$. Výsledná množina je pravý uhol s vrcholom v počiatku a vnútorným bodom $[0,1]$. b) Po odstránení absolútnych hodnôt dostanete rovnicu priamky. Prienikom tejto priamky s uhlom z úlohy a) je úsečka s krajnými bodmi $[-5,5]$ a $[5,5]$.]

N3. Zdôvodnite, prečo pre ľubovoľnú hodnotu reálneho parametra k má sústava rovníc

$$
\begin{aligned}
|x+6|+2|y| &= 24,\\
|x+6|+|y| &= k
\end{aligned}
$$

párny počet riešení v obore reálnych čísel. [Obe zodpovedajúce množiny bodov (hranice kosoštvorca a štvorca) sú súmerné podľa osi x. Teda pre každé riešenie (x,y) tejto sústavy rovníc je aj dvojica $(x,-y)$ jej riešením. Ak teda pre každé riešenie (x,y) platí $y \neq 0$, má sústava párny počet riešení (hranice štvorca a kosoštvorca nemôžu mať nekonečne veľa spoločných bodov). Ak naopak má sústava riešenie tvaru $(x,0)$, je nutne $k=24$. Potom existujú práve dve riešenia $(-30,0)$ a $(18,0)$.]

D1. Určte všetky dvojice (a,b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc

$$
\begin{aligned}
|x|+y &= a,\\
2|y|-x &= b
\end{aligned}
$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia určte. [66-B-I-2]

D2. Použitím grafickej metódy a ďalej potom výpočtom určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$
\begin{aligned}
|x|+|y-1| &= 1,\\
|x-1|+|y| &= p,
\end{aligned}
$$

pričom p je reálny parameter. [13-A-II-3]

---

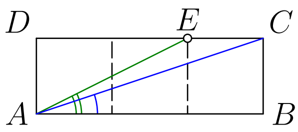
5. *Daný je pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Kolmica vedená bodom D na priamku DE pretína priamky CG a AB postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že $|AQ|+|EF|=|GP|$.* (*Marián Poturnay*)

Návodné a doplňujúce úlohy:

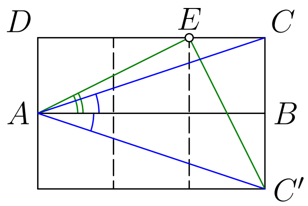
N1. Rozmyslite si, že pravidelný sedemuholník je osovo súmerný a každá jeho uhlopriečka je rovnobežná s niektorou z jeho strán. [Os ktorejkoľvek strany sedemuholníka je jeho osou súmernosti. Rovnobežnosť vybranej uhlopriečky s vhodnou stranou dokážte z osovej súmernosti.]

D1. Majme ostrouhlý trojuholník ABC so štandardne označenými uhlami. Predpokladajme, že platí $|AB| < |AC|$. Na strane AC zvoľme bod D tak, aby platilo $|\measuredangle CBD| = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Dokážte, že $|AB| + |CD| = |AC|$. [Dokážte, že $|AB| = |AD|$. Na to stačí overiť rovnosť $|\measuredangle ABD| = |\measuredangle ADB|$.]

D2. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| = 3|BC|$ a na strane CD je zvolený bod E tak, že $|BC| = |CE|$. Dokážte, že $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle BAE| = 45°$. [Obdĺžnik $ABCD$

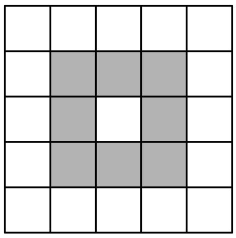


s uhlopriečkou AC zobrazte v osovej súmernosti podľa AB. Bod C sa zobrazí na C'. Dokážte, že trojuholník $AC'E$ je rovnoramenný a pravouhlý.]



---

6. *Na pláne s rozmermi* 12×12 *štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca* 3×3 *(na obr. 2 je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz?* (Jozef Rajník)



Obr. 2

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Súťažnú úlohu „zmenšíme“. Vyriešte postupne tri úlohy, v ktorých plán 12×12 nahradíme plánom a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6. [V úlohách a) aj b) stačia dva výstrely, v c) štyri výstrely. Plán 6×6 rozdeľte na neprekrývajúce sa štvorce 3×3.]

D1. Na pláne s rozmermi 6×6 štvorčekov sa nachádza loď tvaru štvorca 2×2. Zdôvodnite, že treba najmenej 9 výstrelov, aby sme mali istotu, že sme loď zasiahli. [Plán 6×6 rozdeľte na 9 neprekrývajúcich sa štvorcov 2×2.]

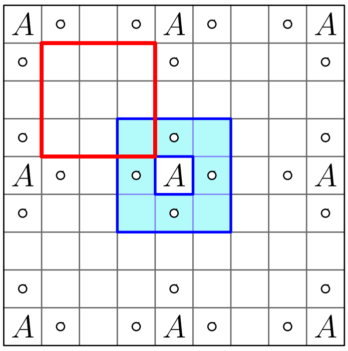
D2. Určte, koľko je všetkých dvojíc políčok daného štvorca 4×4, ktorých zásahom dosiahneme s istotou aj zásah lode zo zadania súťažnej úlohy, ktorá je v tomto štvorci akokoľvek umiestnená. [Je ich 34. Všetky vyhovujúce dvojice políčok rozdeľte do troch skupín podľa toho, koľko je v nich políčok vnútorného štvorca 2×2 (políčka A, B, C, D na obrázku vľavo). Potom dokážte: V jednej skupine sú všetky dvojice políčok z kvarteta $\mathcal{K} = \{A, B, C, D\}$. V druhej skupine sú všetky dvojice tvorené vždy jedným políčkom $X \in \mathcal{K}$ a jedným z piatich políčok $Y \notin \mathcal{K}$, ktoré majú s X aspoň jeden spoločný vrchol – pre políčko $X = A$ sú na obrázku vľavo vyznačené bodkou. V tretej skupine sú práve také dvojice políčok, ktoré sú na obrázku vpravo označené rôznymi číslami jednej parity.

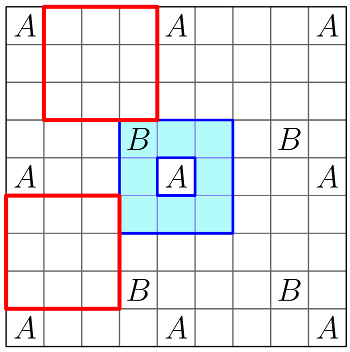
$\circ$	$\circ$	$\circ$	
$\circ$	A	B	
$\circ$	C	D	

	1	1	
4			2
4			2
	3	3	

Hľadaný počet je tak rovný $6 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 34$.]

D3. Dokážte, že podmienku súťažnej úlohy *je nemožné* splniť tak, že celý plán $12 \times \times 12$ rozdelíme na 9 štvorcov 4×4 a potom v každom z nich vystrelíme na dve políčka, a to na rovnakých dvoch miestach vo všetkých 9 štvorcoch. [Označíme rovnakým z písmen A, B tie zasiahnuté políčka, ktoré sú na rovnakom mieste vo všetkých deviatich štvorcoch. Políčka A tak sú rozmiestnené v istom štvorci 9×9, ako vidíme na obrázku vľavo. Pre políčka B ho to podobne.

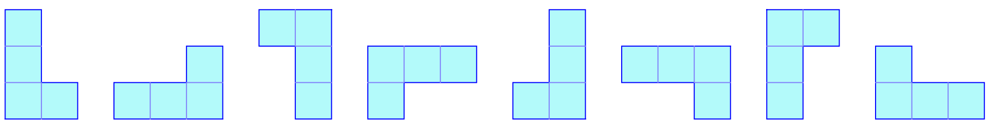




Uvažujme loď v polohe, pri ktorej obklopuje políčko A v strede štvorca $9 \times \times 9$. Aby táto loď bola zasiahnutá, musí v niektorom z ôsmich jej políčok stáť B. Ak sa jedná o jedno zo štyroch modrých políčok označených bodkou, tak označenie bodkou majú na obrázku vľavo všetky políčka B z nášho štvorca 9×9, v ktorom teda môžeme nájsť štvorce 3×3 bez zásahu, dokonca aj bez bodiek – jeden zo štyroch takých je na rovnakom obrázku vľavo vyznačený. Ak je uvažovaná loď zasiahnutá v jednom zo štyroch políčok v jej rohoch, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sa jedná o ľavý horný roh (inak stačí štvorec na obrázku vľavo pootočiť). V uvažovanom štvorci 9×9 sa potom nachádzajú práve 4 políčka B – pozri obrázok vpravo, v ktorom sú navyše vyznačené dva z ôsmich štvorcov 3×3 bez zásahu.]

D4. Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. [58-B-I-4]

D5. Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď majúca niektorý z tvarov na obrázku.



Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. a) Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode. b) Zdôvodnite, že sedem otázok vo všeobecnosti takú istotu nedáva. [58-B-II-2]