70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Návodné úlohy domáceho kola kategórie C*

V prvej časti textu pod zadaním každej zo šiestich súťažných úloh nájdete zadania návodných a doplňajúcich úloh. Tie isté úlohy aj s riešeniami (resp. odpoveďami a náznakmi riešení či odkazmi na riešenia v našom archíve) nájdete v druhej časti textu.

---

1. *Určte všetky dvojice (m, n) prirodzených čísel, pre ktoré platí*

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

pričom $s(a)$ označuje ciferný súčet prirodzeného čísla a. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojciferné čísla, ktoré sú rovné trojnásobku svojho ciferného súčtu.

N2. Určte všetky dvojciferné čísla, ktoré sú rovné súčtu svojej desiatkovej cifry a druhej mocniny jednotkovej cifry.

N3. Určte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

$$n + s(n) = 2\,019,$$

pričom $s(n)$ označuje ciferný súčet čísla n.

N4. V roku 2000 Alena zistila, že jej vek je rovný súčtu cifier roku, v ktorom sa narodila. Koľko má rokov v roku 2020?

D1. Určte všetky štvorciferné čísla, ktoré sú štyrikrát menšie ako číslo napísané rovnakými ciframi, avšak v opačnom poradí.

D2. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

---

2. *Určte, pre ktoré prirodzené čísla n možno tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 2 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol deliteľný a) dvoma, b) troma.

N2. Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n možno štvorcovú tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 1 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0.

N3. Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a aby súčet všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach bol rovnaký (dostaneme tzv. *magický štvorec*).

D1. Tabuľka 3×3 je vyplnená navzájom rôznymi prirodzenými číslami tak, že v každom riadku aj stĺpci je súčet krajných čísel rovný číslu napísanému medzi nimi. Zistite, aké najmenšie číslo môže byť napísané uprostred tabuľky.

D2. Koľkými spôsobmi možno do políčok tabuľky 2×3 vpísať čísla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak, aby každé bolo použité práve raz a aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol deliteľný troma?

3. *V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme postupne I a U stred kružnice jemu vpísanej a dotykový bod tejto kružnice s odvesnou BC. Určte, aký je pomer $|AC| : |BC|$, ak sú uhly CAU a CBI zhodné.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech D, E, F sú dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ABC postupne so stranami BC, CA, AB. Pomocou ich dĺžok a, b, c vyjadrite dĺžky úsekov, na ktoré body D, E, F rozdeľujú jednotlivé strany.

N2. Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.

N3. Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.

N4. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán, ktorých kružnica vpísaná má polomer 2.

D1. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Kolmým priemetom kružnice vpísanej danému trojuholníku na preponu AB je úsečka MN. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je súčasne stredom kružnice opísanej trojuholníku MNC.

---

4. *Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz*

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1. (Michal Rolínek, Pavel Calábek)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech a, b, c sú nenulové reálne čísla, ktorých súčet je rovný 0. Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

N2. Nech a, b, c sú nenulové reálne čísla, ktorých súčet je rovný 0. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

N3. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. Dokážte, že platí rovnosť

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

D1. Ak reálne čísla a, b, c spĺňajú rovnicu

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$

tak platí $a + b + c = 0$ alebo $a = b = c$. Dokážte.

D2. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)$, ak sú a_1, a_2, a_3 kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1.

D3. Pre nezáporné reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$. Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2.$$

---

5. *Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Na priamkach AT a BT sú zvolené postupne body E a F tak, že štvoruholník $TECF$ je rovnobežník. Dokážte, že úsečky AC a BC delia úsečku EF na tri zhodné časti.* (*Tomáš Jurík*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech D, E sú postupne stredy strán AB, BC trojuholníka ABC a F je stred úsečky AD. Dokážte, že priamka CD rozpoľuje úsečku EF.

N2. Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B sú postupne stredmi úsečiek CF a CG. Priamka CD pretína priamku FB v bode I a priamka CE pretína priamku AG v bode J. Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG.

N3. Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme M stred strany BC. Na polpriamke opačnej k BA leží bod D taký, že $|AB| = |BD|$. Podobne na polpriamke opačnej k CA leží bod E taký, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE pretínajú stranu BC postupne v bodoch P, Q. Dokážte, že body P, Q, M rozdeľujú úsečku BC na štyri rovnako dlhé časti.

---

6. *Na tabuli je napísaných niekoľko prirodzených čísel od 1 do 100, pričom žiadne z nich nie je deliteľné dvojciferným prvočíslom a súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.*

a) Určte najväčší možný počet čísel na tabuli.

b) Určte najväčší možný súčet čísel na tabuli. (*Jaromír Šimša*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Aký je najväčší možný počet čísel, ktoré sa dajú vybrať z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ tak, aby súčin žiadnych troch z vybraných čísel nebol deliteľný deviatimi? Uveďte príklad vyhovujúcej podmnožiny a zdôvodnite, prečo nemôže mať väčší počet prvkov.

N2. Aký je najmenší možný súčet štyroch prirodzených čísel takých, že dvojice vytvorené z týchto čísel majú najväčšie spoločné delitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte príklad vyhovujúcej štvorice s takým súčtom a zdôvodnite, prečo neexistuje vyhovujúca štvorica s menším súčtom.

Na nasledujúcich stranách nájdete tie isté návodné a doplňajúce úlohy ešte raz, avšak doplnené o výsledky s náznakmi riešení či o odkazy na náš archív.

1. *Určte všetky dvojice (m, n) prirodzených čísel, pre ktoré platí*

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

pričom $s(a)$ označuje ciferný súčet prirodzeného čísla a. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojciferné čísla, ktoré sú rovné trojnásobku svojho ciferného súčtu. [Označme $n = \overline{ab}$, potom $n = 10a + b = 3(a + b)$, t. j. $7a = 2b$. Keďže čísla 2 a 7 sú nesúdeliteľné, je $b = 7$ a $a = 2$ ($a \neq 0$), a teda $n = 27$.]

N2. Určte všetky dvojciferné čísla, ktoré sú rovné súčtu svojej desiatkovej cifry a druhej mocniny jednotkovej cifry. [Pre hľadané číslo $n = \overline{ab}$ platí $n = 10a + b = a + b^2$, t. j. $9a = b(b-1)$. Vzhľadom na to, že čísla b a $b-1$ sú nesúdeliteľné, je buď $9 \mid b$, alebo $9 \mid (b - 1)$. Zadaniu úlohy vyhovuje iba $n = 89$.]

N3. Určte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

$$n + s(n) = 2\,019,$$

pričom $s(n)$ označuje ciferný súčet čísla n. [69-C-S-1]

N4. V roku 2000 Alena zistila, že jej vek je rovný súčtu cifier roku, v ktorom sa narodila. Koľko má rokov v roku 2020? [Súčet cifier roku jej narodenia je rovný nanajvýš 28 $(= 1+9+9+9)$. Rok jej narodenia je teda štvorciferné číslo tvaru $\overline{19xy}$, pre ktoré platí $2000 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$. Z toho po úprave máme $90 = 11x + 2y$, odkiaľ zrejme $x = 8$ a $y = 1$. Vek Aleny v roku 2020 je teda 39 rokov.]

D1. Určte všetky štvorciferné čísla, ktoré sú štyrikrát menšie ako číslo napísané rovnakými ciframi, avšak v opačnom poradí. [Označme $\overline{abcd}$ hľadané číslo. Potom platí $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$. Cifra a musí byť párna a súčasne $a \leqq 2$. Teda $a = 2$, a teda $d = 8$. Jediným riešením je potom číslo 2178.]

D2. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69-C-I-1]

2. *Určte, pre ktoré prirodzené čísla n možno tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 2 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol deliteľný a) dvoma, b) troma. [a) Nedá sa – ak by súčet čísel už len v každom riadku tabuľky bol deliteľný dvoma, bol by aj súčet všetkých čísel v tabuľke deliteľný dvoma. Ich súčet je však rovný 45. b) Áno – ľahko možno nájsť konkrétny príklad.]

N2. Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n možno štvorcovú tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 1 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0. [Pre každé párne číslo n možno tabuľku $n \times n$ požadovaným spôsobom vyplniť podľa vzoru čierno-bielej šachovnice. Pre nepárne n sa to nedá, lebo v žiadnom riadku (stĺpci) nemôže byť rovnaký počet čísel -1 a 1.]

N3. Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a aby súčet všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach bol rovnaký (dostaneme tzv. *magický štvorec*). [Keďže súčet daných deviatich čísel je rovný 45, musí byť súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci rovný $45 : 3 = 15$, čo je nepárne číslo. Nepárnych čísel je v tabuľke o jedno viac ako párnych. Navyše $1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 10$. Ak je teda v prostrednom políčku tabuľky číslo 5, ľahko nájdeme konkrétny príklad možného vyplnenia tejto tabuľky.]

D1. Tabuľka 3×3 je vyplnená navzájom rôznymi prirodzenými číslami tak, že v každom riadku aj stĺpci je súčet krajných čísel rovný číslu napísanému medzi nimi. Zistite, aké najmenšie číslo môže byť napísané uprostred tabuľky. [69-C-S-2]

D2. Koľkými spôsobmi možno do políčok tabuľky 2×3 vpísať čísla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak, aby každé bolo použité práve raz a aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol deliteľný troma? [Matematický klokan 2018, kat. Junior, úloha 21 (48 možností).]

---

3. *V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme postupne I a U stred kružnice jemu vpísanej a dotykový bod tejto kružnice s odvesnou BC. Určte, aký je pomer $|AC| : |BC|$, ak sú uhly CAU a CBI zhodné.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech D, E, F sú dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ABC postupne so stranami BC, CA, AB. Pomocou ich dĺžok a, b, c vyjadrite dĺžky úsekov, na ktoré body D, E, F rozdeľujú jednotlivé strany. [Platí $|AE| = |AF| = s-a$, $|BF| = |BD| = s-b$, $|CD| = |CE| = s-c$, pričom $2s = a+b+c$.]

N2. Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere $3 : 4$. [61-C-I-2]

N3. Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$. [61-C-S-2]

N4. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán, ktorých kružnica vpísaná má polomer 2. [69-C-S-3]

D1. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Kolmým priemetom kružnice vpísanej danému trojuholníku na preponu AB je úsečka MN. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je súčasne stredom kružnice opísanej trojuholníku MNC. [Označme I stred kružnice vpísanej a U, V, W postupne jeho kolmé priemety na strany BC, CA, AB. Trojuholníky IMW, INW a IVC sú zrejme zhodné rovnoramenné pravouhlé trojuholníky (s odvesnami veľkosti ϱ polomeru vpísanej kružnice, lebo $|MN| = 2\varrho$). Preto $|IM| = |IN| = |IC|$.]

4. *Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz*

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1. (*Michal Rolínek, Pavel Calábek*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech a, b, c sú nenulové reálne čísla, ktorých súčet je rovný 0. Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

[Využite identitu $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$. Hodnota daného výrazu je rovná -2.]

N2. Nech a, b, c sú nenulové reálne čísla, ktorých súčet je rovný 0. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

[Menovatele zlomkov na ľavej strane nahraďte číslami $-c$, $-a$, $-b$ a po sčítaní takto upravených zlomkov uplatnite rovnakú identitu ako pri riešení N1.]

N3. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. Dokážte, že platí rovnosť

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

[Prvý zlomok rozšírte z, druhý xz a trikrát využite podmienku $xyz=1$.]

D1. Ak reálne čísla a, b, c spĺňajú rovnicu

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

tak platí $a+b+c=0$ alebo $a=b=c$. Dokážte. [18–B–I–1]

D2. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)$, ak sú a_1, a_2, a_3 kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. [Dokážte a potom medzi sebou vynásobte nerovnosti $1+a_i \geqq 2\sqrt{a_i}$ pre $i=1,2,3$.]

D3. Pre nezáporné reálne čísla a, b, c platí $a+b+c=1$. Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

[69-C-II-4]

5. *Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Na priamkach AT a BT sú zvolené postupne body E a F tak, že štvoruholník $TECF$ je rovnobežník. Dokážte, že úsečky AC a BC delia úsečku EF na tri zhodné časti.* (*Tomáš Jurík*)

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nech D, E sú postupne stredy strán AB, BC trojuholníka ABC a F je stred úsečky AD. Dokážte, že priamka CD rozpoľuje úsečku EF. [68-C-S-3]

N2. Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B sú postupne stredmi úsečiek CF a CG. Priamka CD pretína priamku FB v bode I a priamka CE pretína priamku AG v bode J. Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG. [68-C-I-2]

N3. Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme M stred strany BC. Na polpriamke opačnej k BA leží bod D taký, že $|AB| = |BD|$. Podobne na polpriamke opačnej k CA leží bod E taký, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE pretínajú stranu BC postupne v bodoch P, Q. Dokážte, že body P, Q, M rozdeľujú úsečku BC na štyri rovnako dlhé časti. [8. CPS MO juniorov (2019). Pre dôkaz, že P je stred BM, uvažujte strednú priečku BS v trojuholníku ADT. Úsečka TP je strednou priečkou v trojuholníku BMS.]

6. *Na tabuli je napísaných niekoľko prirodzených čísel od 1 do 100, pričom žiadne z nich nie je deliteľné dvojciferným prvočíslom a súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.*

a) Určte najväčší možný počet čísel na tabuli.
b) Určte najväčší možný súčet čísel na tabuli. (*Jaromír Šimša*)

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Aký je najväčší možný počet čísel, ktoré sa dajú vybrať z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ tak, aby súčin žiadnych troch z vybraných čísel nebol deliteľný deviatimi? Uveďte príklad vyhovujúcej podmnožiny a zdôvodnite, prečo nemôže mať väčší počet prvkov. [68-C-S-1]

N2. Aký je najmenší možný súčet štyroch prirodzených čísel takých, že dvojice vytvorené z týchto čísel majú najväčšie spoločné delitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte príklad vyhovujúcej štvorice s takým súčtom a zdôvodnite, prečo neexistuje vyhovujúca štvorica s menším súčtom. [68-C-II-2]