

2020/2021  
70. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 12. januára 2021.)

1. Koľko rôznych čísel môže byť medzi číslami

$$a + 2b, \quad a + 2c, \quad b + 2a, \quad b + 2c, \quad c + 2a, \quad c + 2b,$$

ak sú  $a, b, c$  navzájom rôzne reálne čísla? Nájdite všetky možnosti. (Josef Tkadlec)

2. Určte všetky trojice zložených prirodzených čísel, z ktorých každé je deliteľné súčinom superdeliteľov zvyšných dvoch čísel. (Superdeliteľom čísla  $n > 1$  je jeho najväčší deliteľ  $d$  s vlastnosťou  $d < n$ .) (Jaromír Šimša)

3. V ostrouhlom trojuholníku  $ABC$  sú  $D$  a  $E$  vnútorné body strany  $BC$ , pritom  $D$  leží medzi  $B$  a  $E$ ,  $|AD| = |CD|$  a  $|AE| = |BE|$ . Predpokladajme, že os uhla  $DAE$  má s osou úsečky  $BC$  jediný spoločný bod, ktorý označíme  $F$ . Dokážte rovnosť  $|\angle BAC| + |\angle DFE| = 180^\circ$ . (Patrik Bak)

4. Okolo kruhu je usporiadaných 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek sme schopní pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne rozsvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu susedných žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)? (Martin Melicher)