70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Koľko rôznych čísel môže byť medzi číslami*

$$a+2b,\quad a+2c,\quad b+2a,\quad b+2c,\quad c+2a,\quad c+2b,$$

ak sú a, b, c navzájom rôzne reálne čísla? Nájdite všetky možnosti. (Josef Tkadlec)

Riešenie. Keďže úloha je v premenných a, b, c symetrická,[1] môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že platí $a<b<c$. Ľahko sa presvedčíme, že potom štyri zo skúmaných šiestich čísel sú podľa veľkosti usporiadané takto:

$$b+2a<a+2b<a+2c<b+2c. \tag{1}$$

Naozaj, prvá nerovnosť vyplýva z $(a+2b)-(b+2a)=b-a>0$, druhá nerovnosť z $(a+2c)-(a+2b)=2(c-b)>0$ a tretia z $(b+2c)-(a+2c)=b-a>0$.

Pozrime sa, ktorým zo štyroch čísel v (1) sa môžu rovnať zvyšné dve čísla $c+2a$ a $c+2b$. Za tým účelom si povšimneme, že rovnako ľahko ako (1) možno dokázať aj nerovnosti

$$b+2a<c+2a<a+2c \quad \text{a} \quad a+2b<c+2b<b+2c. \tag{2}$$

Porovnaním s (1) prichádzame k záveru, že jediné dve možné rovnosti medzi skúmanými šiestimi číslami (za predpokladu $a<b<c$) sú $c+2a=a+2b$ a $c+2b=a+2c$.[2] Obe tieto rovnosti sú však zrejme ekvivalentné s tou istou rovnosťou $b=\frac{1}{2}(a+c)$, ktorá je pri našom predpoklade splniteľná.[3]

Výsledok našich úvah pre prípad $a<b<c$ možno zhrnúť nasledovne:

- Ak je $b=\frac{1}{2}(a+c)$, sú medzi skúmanými číslami práve štyri rôzne. Platí pre ne totiž
$$b+2a<a+2b=c+2a<a+2c=c+2b<b+2c. \tag{3}$$
Stane sa tak napríklad pre $(a,b,c)=(1,2,3)$.
- Ak naopak platí $b\neq\frac{1}{2}(a+c)$, tak všetkých šesť skúmaných čísel je navzájom rôznych. Tak tomu bude napríklad pre $(a,b,c)=(1,2,4)$.

Záver. Hľadaný počet rôznych čísel v zadanej šestici je rovný buď 4, alebo 6.

Poznámka. Po výpise nerovností (1) možno otázku prípadnej rovnosti prvého „zvyšného“ čísla $c+2a$ niektorému z čísel v (1) riešiť aj bez použitia nerovností (2), a to priamym testovaním jednotlivých rovností

$$c+2a=b+2a,\quad c+2a=a+2b,\quad c+2a=a+2c,\quad c+2a=b+2c.$$

Podobne aj pre druhé „zvyšné“ číslo $c+2b$ možno testovať rovnosti

$$c+2b=b+2a,\quad c+2b=a+2b,\quad c+2b=a+2c,\quad c+2b=b+2c.$$

[1] Zmenou poradia čísel a, b, c dôjde iba ku zmene poradia skúmaných šiestich čísel.

[2] Poznamenajme, že aj pri zvolenom usporiadaní $a<b<c$ má doterajší výklad niekoľko variantov, ktoré spočívajú vo vzájomnej výmene čísel v jednej alebo v oboch z dvojíc $(a+2b, c+2a)$ a $(a+2c, c+2b)$ v nerovnostiach (1) a (2).

[3] Rovnosť $y=\frac{1}{2}(x+z)$ totiž pre navzájom rôzne čísla x, y, z znamená, že y leží medzi x a z.

Niektoré z týchto rovností (napr. $c + 2a = b + 2a$) sú vylúčené už tým, že čísla a, b, c sú navzájom rôzne. Ostatné rovnosti (okrem tých z (3)) sú v spore s predpokladaným usporiadaním $a < b < c$ (napr. $c + 2a = b + 2c$ znamená, že $a = \frac{1}{2}(b + c)$, teda číslo a by ležalo medzi číslami b a c.)

Iné riešenie. Pri skúmaní potenciálnych rovností medzi jednotlivými číslami zo zadanej šestice môžeme dospieť k nasledujúcej hypotéze: *Ak sa niektoré dve z týchto šiestich čísel rovnajú, potom jedno z čísel a, b, c je aritmetickým priemerom ostatných dvoch čísel.*

Uvedenú hypotézu možno dokázať mechanickým testovaním všetkých $\binom{6}{2} = 15$ možných rovností. Menej prácny postup založíme na tom, že porovnanie ľubovoľného z daných čísel $x + 2y$ s ostatnými piatimi číslami zapíšeme rovnosťami

$$x+2y = x+2z,\ x+2y = y+2x,\ x+2y = y+2z,\ x+2y = z+2x,\ x+2y = z+2y, \quad (4)$$

pričom x, y, z označuje čísla a, b, c v niektorom poradí. Prvá, druhá a piata rovnosť v (4) odporujú tomu, že čísla x, y a z sú navzájom rôzne. Tretia rovnosť nastane práve vtedy, keď $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Napokon štvrtá rovnosť je splnená práve vtedy, keď $y = \frac{1}{2}(x + z)$. Tým je dôkaz hypotézy ukončený.

Priamym dôsledkom dokázanej hypotézy je tvrdenie: *Ak žiadne z čísel a, b, c nie je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch čísel, je skúmaná šestica tvorená šiestimi rôznymi číslami.*[4]

Zaoberajme sa teda situáciou, ktorú predchádzajúci záver nezahŕňa: jedno z čísel a, b, c je rovné aritmetickému priemeru zvyšných dvoch čísel. Vzhľadom na symetriu môžeme predpokladať, že sa jedná o číslo c, pre ktoré tak platí $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Vtedy máme $a = c + d$ a $b = c - d$, pričom $d = \frac{1}{2}(a - b) \neq 0$. Po dosadení takých hodnôt a, b budú mať čísla zo zadanej šestice postupne vyjadrenia

$$3c - d, \quad 3c + d, \quad 3c + d, \quad 3c - d, \quad 3c + 2d, \quad 3c - 2d.$$

Vďaka tomu, že $d \neq 0$, vidíme, že v takej šestici sú práve štyri navzájom rôzne čísla $3c \pm d$ a $3c \pm 2d$. Dospeli sme tak k rovnakému záveru ako v prvom riešení.

Poznámka. Opíšme iné možnosti, ako posúdiť prípad $c = \frac{1}{2}(a + b)$ bez zavedenia pomocného čísla d. Po dosadení takej hodnoty c získame pre šestice čísel zo zadania vyjadrenie

$$a + 2b, \quad 2a + b, \quad b + 2a, \quad 2b + a, \quad \frac{5a + b}{2}, \quad \frac{5b + a}{2}.$$

Čísla $a + 2b$, $2a + b$ sú tu zastúpené každé dvakrát, takže máme zistiť, koľko rôznych čísel môže byť v štvorici

$$a + 2b, \quad 2a + b, \quad \frac{5a + b}{2}, \quad \frac{5b + a}{2}.$$

Ukázať, že tu už sú všetky čísla navzájom rôzne, možno rutinným testovaním všetkých $\binom{4}{2}$ potenciálnych rovností – každá z nich totiž odporuje predpokladu $a \neq b$. Inou možnosťou je ukázať, že v prípade $a < b$ platí

$$\frac{5a + b}{2} < 2a + b < a + 2b < \frac{5b + a}{2},$$

[4] Že také trojice (a, b, c) existujú, je úplne zrejmé, a preto nie je nutné uvádzať ich príklad. Ani v druhej časti tohto riešenia nebudeme uvádzať príklad trojice (a, b, c) s vlastnosťou $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

zatiaľ čo v opačnom prípade $a > b$ platia aj vypísané ostré nerovnosti naopak.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak sú opísané podmienky, za ktorých je hľadaný počet 4, resp. 6, nie je nutné uvádzať konkrétne príklady trojíc (a, b, c), ak je splniteľnosť týchto podmienok v podanom riešení zrejmá.

V prípade postupu podľa prvého vzorového riešenia dajte: 3 body, ak riešiteľ pri zvolenom usporiadaní nájde v zadanej šestici štyri rôzne čísla (2 body) a zdôvodní ich rôznosť (1 bod); 3 body za úplnú diskusiu o „zvyšných" dvoch číslach zo šestice. Ak riešiteľ nevylúči možnosť piatich rôznych čísel, môže získať nanajvýš 3 body.

V prípade postupu podľa druhého vzorového riešenia dajte: 2 body za dôkaz uvedenej hypotézy; 1 bod za z toho vyplývajúci záver, kedy sú v zadanej šestici všetky čísla navzájom rôzne; 3 body za vyriešenie jedného z prípadov typu $c = \frac{1}{2}(a + b)$. V prípade drobnej chyby v dôkaze hypotézy strhnite 1 bod (zabudnutie niektorého z piatich prípadov).

Len za uhádnutie úplnej odpovedi dajte 1 bod, ale iba v prípade, že sú oba počty 4 a 6 podložené buď konkrétnymi príkladmi trojíc (a, b, c), alebo podmienkami, o ktorých je navyše ukázané, že sú na dosiahnutie počtu 4, resp. 6 postačujúce.

---

2. *Určte všetky trojice zložených prirodzených čísel, z ktorých každé je deliteľné súčinom superdeliteľov zvyšných dvoch čísel. (Superdeliteľom čísla $n > 1$ je jeho najväčší deliteľ d s vlastnosťou $d < n$.)* (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Superdeliteľa d zloženého čísla n dostaneme, keď z rozkladu čísla n na súčin prvočísel vyškrtneme najmenšieho zastúpeného činiteľa (jedného, ak je ich viac).[5] Preto platí $n = pd$, pričom p je prvočíslo s vlastnosťou $p \leqq d$.[6]

Nech n_1, n_2, n_3 je ľubovoľná hľadaná trojica. Podľa úvodného odseku pre superdeliteľa d_i čísla n_i platí rovnosť $n_i = p_i d_i$, pričom p_i je prvočíslo a pritom $p_i \leqq d_i$ pre každé $i = 1, 2, 3$. Podľa zadania úlohy má platiť súčasne $d_2 d_3 \mid p_1 d_1$, $d_1 d_3 \mid p_2 d_2$ a $d_1 d_2 \mid p_3 d_3$. Vynásobením týchto troch relácií dostaneme

$$(d_1 d_2 d_3)^2 \mid p_1 p_2 p_3 d_1 d_2 d_3, \quad \text{čiže} \quad d_1 d_2 d_3 \mid p_1 p_2 p_3.$$

Na druhej strane, vynásobením troch nerovností $p_i \leqq d_i$ dostaneme $p_1 p_2 p_3 \leqq d_1 d_2 d_3$. Zo záverov dvoch posledných viet vyplýva, že musí platiť rovnosť $d_1 d_2 d_3 = p_1 p_2 p_3$. Z toho vďaka spôsobu odvodenia nerovnosti $p_1 p_2 p_3 \leqq d_1 d_2 d_3$ zisťujeme, že musí platiť rovnosť $d_i = p_i$, čiže $n_i = p_i^2$ pre každé $i = 1, 2, 3$. Relácia $d_2 d_3 \mid p_1 d_1$ potom znamená, že $p_2 p_3 \mid p_1^2$, takže všetky tri prvočísla p_i sa musia rovnať tomu istému prvočíslu p. Potom platí $d_i = p$ a $n_i = p^2$ pre každé $i = 1, 2, 3$, takže podmienky $d_i d_j \mid n_k^2$ sú zrejme splnené v podobe $p^2 \mid p^2$.

Záver. Riešeniami úlohy sú práve trojice (p^2, p^2, p^2), pričom p je ľubovoľné prvočíslo.

Iné riešenie. Keďže hľadané čísla n_i $(i = 1, 2, 3)$ sú zložené, ich superdelitele d_i sú väčšie ako 1. Vzhľadom na symetriu zadania môžeme dokonca predpokladať, že platí $1 < d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$.

Vieme, že $d_1 \mid n_1$ a že podľa zadania úlohy tiež $d_2 d_3 \mid n_1$, a teda aj $d_2 \mid n_1$ a $d_3 \mid n_1$. Všetky čísla d_1, d_2, d_3 a $d_2 d_3$ tak sú deliteľmi čísla n_1, pre ktoré navyše podľa nášho predpokladu platí

$$d_1 \leqq d_2 \leqq d_3 < d_2 d_3 \leqq n_1.$$

Keďže však d_1 je superdeliteľ čísla n_1, z posledných nerovností vyplýva $d_1 = d_2 = d_3$ a $d_2 d_3 = n_1$. Pri označení d spoločnej hodnoty čísel d_i tak platí $n_1 = d^2$.

---

[5] Podrobnejšie o určovaní superdeliteľov pozri vzorové riešenie úlohy 4 z domáceho kola.

[6] Fakt, že prvočíslo p musí byť *najmenším* prvočiniteľom čísla n, v našom riešení potrebovať nebudeme.

Vďaka rovnostiam $d = d_i$ teraz z relácií $d_1 d_3 \mid n_2$ a $d_1 d_2 \mid n_3$ vyplývajú závery $n_2 = d^2$, resp. $n_3 = d^2$, a to rovnakým postupom, ako sme skôr za (slabšieho) predpokladu $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$ odvodili záver $n_1 = d^2$. Každá hľadaná trojica (n_1, n_2, n_3) teda musí mať tvar (d^2, d^2, d^2); vyhovovať pritom budú zrejme práve tie čísla $d > 1$, ktoré sú superdeliteľmi čísla d^2. Stane sa tak práve vtedy, keď d bude prvočíslo. Naozaj: ak je d prvočíslo, tak 1, d a d^2 sú jedinými deliteľmi čísla d^2, takže d je jeho superdeliteľom; ak je naopak číslo d zložené, je deliteľné niektorým prvočíslom $p < d$, takže pd je deliteľom čísla d^2 s vlastnosťou $d < pd < d^2$, čo odporuje tomu, že d je superdeliteľom čísla d^2. Dospeli sme tak k rovnakému záveru ako pri prvom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Strhnite ale 1 bod, ak chýba záverečná skúška (ak je pri danom postupe nutná).

Pri čiastočných riešeniach dajte: a) 3 body, ak riešiteľ usporiada tri superdelitele d_i podľa veľkosti a dokáže ich rovnosť; b) 2 body, ak riešiteľ uhádne výsledok a overí, že trojice (p^2, p^2, p^2) vyhovujú; c) 1 bod, ak riešiteľ uhádne výsledok (bez jeho overenia) a/alebo uvedie poznatok, že každé zložené číslo n je tvaru $n = pd$, pričom d je superdeliteľ čísla n a p je najmenší prvočiniteľ čísla n, alebo iba prvočíslo s vlastnosťou $p \leqq d$ (možno sa pritom odvolať na vzorové riešenie úlohy 4 z domáceho kola). Zisky za časti a), b), c) sa pritom nesčítajú (berie sa najväčší z nich), len za obe časti a) a b) prislúchajú dokopy 4 body.

---

3. *V ostrouhlom trojuholníku ABC sú D a E vnútorné body strany BC, pritom D leží medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Predpokladajme, že os uhla DAE má s osou úsečky BC jediný spoločný bod, ktorý označíme F. Dokážte rovnosť $|\angle BAC| + |\angle DFE| = 180°$.* (*Patrik Bak*)

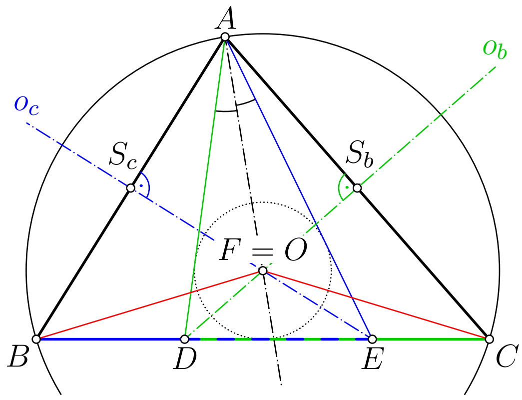
Riešenie. V celom texte budeme používať štandardné označenie α, β, γ veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Kľúčovým bodom postupu bude zistenie, že bod F je totožný so stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý označíme O. V prvej časti riešenia tento poznatok dokážeme dvoma spôsobmi.

1. spôsob. Vďaka predpokladu $|AD| = |CD|$ je os o_b strany AC totožná s osou uhla CDA, a teda aj s osou uhla EDA.[7] Analogicky os o_c strany AB je totožná s osou uhla AED. Táto dvojaká rola oboch osí vedie k záveru, že stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC je súčasne stredom kružnice vpísanej trojuholníku ADE. Z toho vyplýva, že polpriamka AO je osou uhla DAE. Zároveň však platí $|OB| = |OC|$, takže bod O je spoločným bodom osi uhla DAE a osi úsečky BC. Podľa zadania je ale ich spoločný bod jediný a má označenie F, takže naozaj platí $F = O$.

2. spôsob. Inou úvahou znova dokážeme, že polpriamka AO je os uhla DAE, odkiaľ už rovnako ako pri 1. spôsobe vyplynie záver o rovnosti $F = O$. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle platí $|\angle AOB| = 2\gamma$, takže z rovnoramenného trojuholníka ABO potom máme $|\angle OBA| = |\angle BAO| = 90° - \gamma$. Ďalej v rovnoramennom trojuholníku ACD platí $|\angle DAC| = |\angle ACD| = \gamma$, teda $|\angle BAD| = |\angle BAC| - |\angle DAC| = \alpha - \gamma$. Dokopy dostávame $|\angle DAO| = |\angle BAO| - |\angle BAD| = (90° - \gamma) - (\alpha - \gamma) = 90° - \alpha$.[8] Analogickou cestou cez trojuholníky ACO a ABE dostaneme rovnosť $|\angle EAO| = 90° - \alpha$. Dokázaná zhodnosť uhlov DAO a EAO potvrdzuje, že polpriamka AO je naozaj osou uhla DAE.

[7] Zo zadania úlohy totiž vyplýva, že bod E leží medzi bodmi C a D.

[8] Veľkosti uhlov BAO a BAD sme od seba odčítali v správnom poradí, lebo vďaka zadaniu úlohy platí $90° - \alpha > 0$.



Obr. 1

V druhej časti riešenia ostáva dokázať rovnosť $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle DFE| = 180°$, ktorú prepíšeme na tvar $|\measuredangle DFE| = 180° - \alpha$. To sa bude dať spraviť obzvlášť ľahko, ak okrem dokázanej rovnosti $F = O$ využijeme opäť osi o_b, o_c úsečiek AC, resp. AB, ktorých stredy označíme S_b, resp. S_c ako na obr. 1. Okrem toho uvedieme dva postupy bez použitia týchto osí.

1. spôsob. Body S_b, F, D ležia v tomto poradí na osi o_b, rovnako ako body S_c, F, E na osi o_c. Okrem toho platí $FS_b \perp AC$ a $FS_c \perp AB$, takže zo štvoruholníka AS_bFS_c vyplýva, že jeho vnútorný uhol S_bFS_c má veľkosť $180° - \alpha$. Rovnakú veľkosť má preto aj vrcholový uhol DFE, ako sme potrebovali ukázať. Dodajme, že veľkosť $180° - \alpha$ uhla DFE možno vypočítať aj z trojuholníka DEF, v ktorom totiž vďaka osiam o_b, o_c platia rovnosti $|\measuredangle FDE| = 90° - \gamma$ a $|\measuredangle FED| = 90° - \beta$.

2. spôsob. Všimnime si, že štvoruholník $BDFA$ je tetivový, lebo podľa vety o obvodovom a stredovom uhle platí $|\measuredangle AFB| = 2\gamma$ a tiež vonkajší uhol ADB rovnoramenného trojuholníka ACD má veľkosť 2γ. Analogicky je aj štvoruholník $AFEC$ tetivový. Zo štvoruholníkov $BDFA$ a $AFEC$ tak vyplývajú rovnosti $|\measuredangle AFD| = 180° - \beta$ a $|\measuredangle AFE| = 180° - \gamma$. Ich dosadením do $|\measuredangle DFE| = 360° - |\measuredangle AFD| - |\measuredangle AFE|$ už získame $|\measuredangle DFE| = \beta + \gamma = 180° - \alpha$.

3. spôsob. Namiesto rovnosti $F = O$ využijeme už skôr dokázaný poznatok o tom, že bod F je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ADE. Podľa známeho vzorca to znamená, že $|\measuredangle DFE| = 90° + \frac{1}{2}|\measuredangle DAE|$.[9] Posledný uhol bude mať potrebnú veľkosť $180° - \alpha$, ak overíme, že $|\measuredangle DAE| = 180° - 2\alpha$. To je jednoduché: vďaka rovnoramenným trojuholníkom ACD, ABE platí $|\measuredangle CAD| = \gamma$, resp. $|\measuredangle BAD| = \beta$, odkiaľ už $|\measuredangle DAE| =$ $= |\measuredangle CAD| + |\measuredangle BAE| - |\measuredangle ABC| = \gamma + \beta - \alpha = 180° - 2\alpha$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho: 4 body za dôkaz, že bod F je totožný so stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC; 2 body za dôkaz uhlovej rovnosti zo záveru zadania.

V prípade neúplných riešení dajte 1 bod za hypotézu o totožnosti bodov F a O. Ak riešiteľ dokáže uhlovú rovnosť použitím nedokázanej hypotézy $F = O$, dajte celkom 3 body.

Žiadny bod neudeľujte ani za nedokázanú hypotézu, že $ABDF$ je (rovnako ako $ACEF$) tetivový štvoruholník, ani za dôkaz, že $ABDO$ a $ACEO$ sú tetivové štvoruholníky.

[9] Vyplýva to z výpočtu $|\measuredangle DFE| = 180° - |\measuredangle EDF| - |\measuredangle FED| = 180° - \frac{1}{2}|\measuredangle EDA| - \frac{1}{2}|\measuredangle AED| =$ $= 180° - \frac{1}{2}(|\measuredangle EDA| + |\measuredangle AED|) = 180° - \frac{1}{2}(180° - |\measuredangle DAE|) = 90° + \frac{1}{2}|\measuredangle DAE|$.

4. *Okolo kruhu je usporiadaných 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek sme schopní pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne rozsvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu susedných žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)?* (Martin Melicher)

Riešenie. Očíslujme žiarovky $1, 2, \ldots, 70$ v poradí po obvode kruhu. S číslami žiaroviek budeme počítať „cyklicky“, t. j. ako so zvyškovými triedami modulo 70 (takže napr. $68 + 3$ je rovné 1). Písmenom i budeme označovať ľubovoľné celé číslo od 1 do 70. Spojenie „rozsvietiť danú skupinu čísel“ bude znamenať rozsvietiť všetky žiarovky s číslami z tejto skupiny a žiadne iné. V záverečnej poznámke a pokynoch pre bodovanie budeme písať o „párnych“ a „nepárnych“ žiarovkách podľa ich čísel.

Predpokladajme, že máme danú skupinu prepínačov, ktorou sme schopní rozsvietiť každú štvoricu $\{i, i+1, i+2, i+3\}$. Ukážeme, že v takej skupine je aspoň 68 prepínačov.

Keďže vieme rozsvietiť obe štvorice $\{i, i+1, i+2, i+3\}$ a $\{i+1, i+2, i+3, i+4\}$, spojením oboch prislúchajúcich postupov docielime rozsvietenie dvojice $\{i, i+4\}$. Tým pádom vieme rozsvietiť každú z dvojíc

$$\{i, i+4\},\ \{i+4, i+8\},\ \{i+8, i+12\}, \ldots,\ \{i+68, i+72\},$$

takže spojením prislúchajúcich postupov docielime rozsvietenie dvojice $\{i, i+72\}$, t. j. dvojice $\{i, i+2\}$.

Zvoľme teraz za d ľubovoľné prirodzené číslo menšie ako 35. Keďže vieme rozsvietiť každú z d dvojíc

$$\{i, i+2\},\ \{i+2, i+4\},\ \{i+4, i+6\},\ \ldots,\ \{i+2d-2, i+2d\},$$

spojením prislúchajúcich postupov docielime rozsvietenie dvojice $\{i, i+2d\}$.

Získané dvojice $\{i, i+2d\}$ reprezentujú všetky dvojprvkové množiny čísel (od 1 do 70) jednej parity. Keďže sme schopní rozsvietiť každú z nich, môžeme opakovaným rozsvecovaním po dvojiciach rozsvietiť ľubovoľnú množinu $M \subseteq \{1, \ldots, 70\}$, ktorá obsahuje párny počet párnych čísel a zároveň párny počet nepárnych čísel (počítame aj prázdnu množinu M, ktorú sme tiež schopní „rozsvietiť“). Určíme počet všetkých takých množín M.

Párne čísla od 1 do 70 tvoria 35-prvkovú množinu, ktorá má práve 2^{34} podmnožín s párnym počtom prvkov.[10] Rovnako tak nepárne čísla od 1 do 70 tvoria 35-prvkovú množinu, ktorá má práve 2^{34} podmnožín s párnym počtom prvkov. Hľadaný počet množín M z predchádzajúceho odseku je preto $2^{34} \cdot 2^{34} = 2^{68}$.

Keďže daná skupina prepínačov umožňuje dosiahnuť aspoň 2^{68} rôznych stavov rozsvietenia, je v nej aspoň 68 prepínačov,[11] ako sme sľúbili dokázať.

Ostáva uviesť príklad skupiny 68 prepínačov, ktorými možno rozsvietiť každú štvoricu $\{i, i+1, i+2, i+3\}$. Za tým účelom označme ako $[p, q]$ prepínač, ktorý zmení stav

[10] Pozri vzorové riešenie príkladu 6 z domáceho kola, pričom bolo dokázané, že každá n-prvková množina má práve 2^{n-1} podmnožín s párnym počtom prvkov.

[11] Vo vzorovom riešení príkladu 6 z domáceho kola bolo zdôvodnené, že použitím k prepínačov možno dosiahnuť nanajvýš 2^k rôznych stavov rozsvietenia.

práve dvoch žiaroviek, konkrétne tých s číslami p a q. Ukážeme, že skupina 68 takých prepínačov

$$[1,3],\ [2,4],\ [3,5],\ \ldots,\ [66,68],\ [67,69],\ [68,70]$$

nášmu zadaniu vyhovuje. Určite nimi rozsvietime ktorúkoľvek dvojicu $\{i, i+2\}$ s dvoma výnimkami, keď $i = 69$ a $i = 70$.

Použitím prepínačov $[1,3]$, $[3,5]$, $\ldots$, $[67,69]$ rozsvietime vo výsledku dvojicu $\{1,69\}$, t. j. dvojicu $\{i, i+2\}$ pre $i = 69$. Podobne použitím prepínačov $[2,4]$, $[4,6]$, $\ldots$, $[68,70]$ rozsvietime dvojicu $\{i, i+2\}$ pre $i = 70$. Vieme teda rozsvietiť každú dvojicu $\{i, i+2\}$, a tým pádom aj každú štvoricu $\{i, i+1, i+2, i+3\}$ (rozsvietime po sebe dvojice $\{i, i+2\}$ a $\{i+1, i+3\}$).

Poznámka. Pre inú konštrukciu vyhovujúcich 68 prepínačov možno využiť príklad 6 domáceho kola, v ktorom sme vlastne zostrojili $n-1$ prepínačov pre množinu n žiaroviek tak, aby nimi bolo možné rozsvietiť každú skupinu s párnym počtom žiaroviek (nebolo podstatné, že v príklade bolo konkrétne $n = 70$ párne). Podľa toho si tak teraz pripravíme 34 prepínačov pre našich 35 párnych žiaroviek a 34 prepínačov pre našich 35 nepárnych žiaroviek. Každá štvorica susedných žiaroviek je zrejme zložená z dvojice párnych a dvojice nepárnych žiaroviek, je ju preto možné rozsvietiť.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho: 3 body za dôkaz, že ak možno rozsvietiť každú štvoricu susedných žiaroviek, tak možno rozsvietiť ľubovoľnú skupinu žiaroviek s párnym počtom párnych žiaroviek a párnym počtom nepárnych žiaroviek; 1 bod za dôkaz, že takých skupín žiaroviek je 2^{68} (je možné sa odvolať na tvrdenie z domáceho kola o počte tých podmnožín danej množiny, ktoré majú párny počet prvkov); 1 bod za zdôvodnenie, že potrebujeme aspoň 68 prepínačov (je možné sa odvolať na argumentáciu z domáceho kola); 1 bod za príklad vyhovujúcej skupiny 68 prepínačov (možno si pritom pomôcť odvolaním sa na konštrukciu z domáceho kola), ak je ale zdôvodnené, že navrhnutá skupina prepínačov je naozaj vyhovujúca.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021