70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

---

1. *Z cifier* 0 *až* 9 *vytvoríme dvojciferné čísla* AB, CD, EF, GH, IJ, *pričom každú cifru použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať súčet* $AB + CD + EF + GH + IJ$ *a ktoré hodnoty to sú. (Zápisy typu* 07 *nepovažujeme za dvojciferné čísla.)* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Hodnota skúmaného súčtu

$$S = AB + CD + EF + GH + IJ$$

závisí iba od toho, ktorých päť cifier sa nachádza v zostavených číslach na mieste desiatok, a ktorých päť na mieste jednotiek. Ak totiž určíme súčty čísel v oboch spomenutých päticiach

$$S_1 = A + C + E + G + I \quad \text{a} \quad S_0 = B + D + F + H + J,$$

budeme zrejme mať $S = 10S_1 + S_0$. Podľa zadania úlohy sčítance v oboch súčtoch S_1 a S_0 spolu tvoria všetkých 10 cifier od 0 po 9. Preto je súčet $S_1 + S_0$ rovnaký ako súčet $0 + 1 + \ldots + 9$, ktorý je rovný 45. Platí teda $S_0 = 45 - S_1$, a tak pre súčet S dostávame vyjadrenie

$$S = 10S_1 + S_0 = 10S_1 + (45 - S_1) = 9S_1 + 45 = 9 \cdot (S_1 + 5).$$

Pre riešenie našej úlohy stačí podľa posledného vzorca zistiť, aké hodnoty môže nadobúdať súčet S_1. Je to súčet cifier A, C, E, G, I na miestach desiatok piatich dvojciferných čísel, a tak to podľa zadania môže byť súčet ľubovoľných piatich rôznych *nenulových* cifier – zvyšnými piatimi nezastúpenými ciframi (vrátane nuly) potom totiž môžeme akokoľvek obsadiť miesta jednotiek vytváraných čísel. Pre súčet takých piatich cifier zrejme platí

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \leqq A + C + E + G + I \leqq 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35.$$

Presvedčíme sa, že súčet $S_1 = A + C + E + G + I$ môže nadobúdať všetkých 21 hodnôt v rozsahu 15 až 35. Napríklad hodnotu 16 dostaneme tak, že v pätici $1, 2, 3, 4, 5$ najväčšie číslo 5 zmeníme na číslo 6. Takto môžeme pokračovať v zväčšovaní súčtu S_1 vždy o 1 tak dlho, až dostaneme päticu $1, 2, 3, 4, 9$. Potom začneme o jednotku opakovane zväčšovať číslo 4, až dostaneme päticu $1, 2, 3, 8, 9$. Podobne pokračujeme ďalej, až nakoniec dôjdeme k pätici $5, 6, 7, 8, 9$. Postupne tak naozaj dostaneme každú celočíselnú hodnotu súčtu S_1 v rozsahu 15 až 35 (ktorých je 21).

Vďaka poslednému zisteniu podľa skôr odvodeného vzorca $S = 9 \cdot (S_1 + 5)$ prichádzame k záveru, že skúmaný súčet $AB + CD + EF + GH + IJ$ môže nadobúdať práve 21 hodnôt, ktorými sú násobky deviatich v rozsahu od 180 po 360 (hraničnú hodnotu sme spočítali ako $9 \cdot (15 + 5) = 180$ a $9 \cdot (35 + 5) = 360$).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Z dvoch rôznych cifier A, B vytvoríme dvojciferné čísla AB a BA. Dokážte, že ich rozdiel je deliteľný 9. [$AB - BA = (10 \cdot A + B) - (10 \cdot B + A) = 9(A - B)$.]

N2. Situáciu zo súťažnej úlohy „zmenšíme“. Z cifier 1, 2, 3, 4 vytvoríme dvojciferné čísla AB, CD, pričom každú cifru použijeme práve raz.
a) Nájdite najmenšiu možnú a najväčšiu možnú hodnotu $AB + CD$.
b) Zistite najmenší možný kladný rozdiel dvoch takto vytvorených čísel $AB + CD$.
[a) Minimum je 37, maximum je 73. Minimum, resp. maximum dostaneme, keď umiestnime najmenšie cifry 1 a 2 na pozície desiatok, resp. na pozície jednotiek. b) 9. Každé vytvorené číslo $AB + CD$ dáva po delení deviatimi rovnaký zvyšok ako číslo $A + B + C + D$ rovné $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, dáva teda zvyšok 1. Preto je rozdiel každých dvoch vytvorených čísel $AB + CD$ deliteľný deviatimi, teda hľadané minimum je kladným násobkom čísla 9. Že to nie je viac ako 9, ukazuje príklad $(12 + 43) - (12 + 34) = 9$.]

N3. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vyberieme tri rôzne. Zdôvodnite, že ich súčet môže nadobúdať ktorúkoľvek celočíselnú hodnotu od 6 do 15. [Nájsť najmenšiu a najväčšiu hodnotu nestačí. Je nutné opísať, ako skonštruovať ktorýkoľvek prípustný súčet, napríklad 13. Opis môže vyzerať ako algoritmus, ktorý prejde všetky súčty od 6 do 15. Keď začneme s trojicou 1, 2, 3, môžeme číslo 3 opakovane zväčšovať o jedna tak dlho, až dostaneme trojicu 1, 2, 6. Potom začneme zväčšovať číslo 2, až dostaneme 1, 5, 6. Nakoniec budeme zväčšovať číslo 1, až dostaneme 4, 5, 6, čím celkovo prejdeme všetky čísla od 6 do 15.]

D1. Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách? [61-C-II-2]

D2. Nájdite všetky osemciferné čísla také, z ktorých po vyškrtnutí niektorej štvorice susedných cifier dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie. [68-B-I-1]

---

2. *Aká je najväčšia možná hodnota výrazu $xy - x^3y - xy^3$, ak sú x, y kladné reálne čísla? Pre ktoré x, y sa táto hodnota dosahuje?* (*Mária Dományová, Patrik Bak*)

Riešenie. Z úpravy daného výrazu V na súčin

$$V = xy - x^3y - xy^3 = xy \cdot (1 - x^2 - y^2)$$

najskôr vidíme, že ak je činiteľ $1 - x^2 - y^2$ záporný, je záporný aj výraz V. Preto ďalej stačí uvažovať iba také kladné x a y, pre ktoré platí $1 - x^2 - y^2 > 0$, ako sa stane napríklad pre $x = y = \frac{1}{2}$, všeobecnejšie pre ľubovoľné x, y blízka nule.

Vďaka učinenému obmedzeniu môžeme hodnotu V odhadnúť zhora tak, že najskôr odhadneme súčin xy podľa známej AG-nerovnosti, ktorá je dokázaná v návodnej úlohe 1. V nej položíme $u = x^2$ a $v = y^2$. Dostaneme tak nerovnosť $xy \leqq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Z nej po vynásobení oboch strán kladným číslom $1 - x^2 - y^2$ dostaneme horný odhad

$$V = xy \cdot (1 - x^2 - y^2) \leqq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \cdot \bigl(1 - (x^2 + y^2)\bigr). \tag{1}$$

Keď teraz označíme $t = x^2 + y^2$, ostáva nám nájsť maximum kvadratickej funkcie $f(t) = t(1 - t)$ pre $t \in (0, 1)$. Toto maximum je možné nájsť opätovným použitím AG-nerovnosti. Tentoraz v nej zvolíme (opäť kladné) hodnoty $u = t$ a $v = 1 - t$, pričom $t = x^2 + y^2$. Keďže $u + v = 1$, má AG-nerovnosť tvar $\sqrt{t(1 - t)} \leqq \frac{1}{2}$, z ktorého po umocnení na druhú dostaneme $t(1 - t) \leqq \frac{1}{4}$. Po dosadení $t = x^2 + y^2$ tak vychádza

$$(x^2 + y^2) \cdot \bigl(1 - (x^2 + y^2)\bigr) \leqq \frac{1}{4}.$$

Z odhadu (1) teda vyplýva $V \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Je nájdené číslo $\frac{1}{8}$ možnou hodnotou výrazu V? A ak áno, pre ktoré prípustné dvojice x, y sa dosahuje? Odpoveď nám poskytne predchádzajúci postup. Podľa neho dosiahneme rovnosť $V = \frac{1}{8}$ práve vtedy, keď v oboch uplatnených AG-nerovnostiach nastane rovnosť. Ako je známe, bude to tak práve vtedy, keď bude platiť $u = v$ pre obe využité dvojice čísel u, v. V našej situácii sa jedná o rovnosti $x^2 = y^2$ a $t = 1 - t$ pre $t = x^2 + y^2$. Ekvivalentná podmienka $x^2 = y^2 = \frac{1}{4}$ zodpovedá jedinej prípustnej dvojici $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Záver. Najväčšia možná hodnota daného výrazu je $\frac{1}{8}$. Výraz ju nadobúda pre jedinú dvojicu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Poznámka. Obe v riešení využité nerovnosti

$$xy \leqq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \text{a} \quad t(1-t) \leqq \frac{1}{4}$$

možno bez odkazu na AG-nerovnosť ľahko dokázať úpravami „na štvorec“, t. j. prepisom do ekvivalentných tvarov

$$\frac{1}{2}(x - y)^2 \geqq 0, \quad \text{resp.} \quad \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0.$$

Z nich tiež vyplývajú nutné a postačujúce podmienky pre prípady rovnosti, t. j. $x = y$, resp. $t = \frac{1}{2}$ (ako aj platnosť oboch nerovností pre ľubovoľné reálne čísla x, y, t bez ohľadu na ich znamienka).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla u, v platí nerovnosť $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u+v)$, pritom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $u = v$. [Zrejme platí $\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \geqq 0$. Po roznásobení ľavej strany túto nerovnosť prepíšeme na tvar $u - 2\sqrt{uv} + v \geqq 0$, čo napokon upravíme na požadované $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u+v)$. Rovnosť v tejto nerovnosti nastane práve vtedy, keď $\sqrt{u} - \sqrt{v} = 0$, čo je ekvivalentné $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, teda aj $u = v$. *Poznámka.* Keďže výraz na ľavej strane nerovnosti je *geometrickým* priemerom dvoch nezáporných reálnych čísel u, v a výraz na pravej strane je ich *aritmetickým* priemerom, nazýva sa uvedená nerovnosť *nerovnosťou medzi aritmetickým a geometrickým priemerom* dvoch nezáporných reálnych čísel, skrátene *AG-nerovnosť*. Podobná rovnako pomenovaná nerovnosť platí aj pre n-tice nezáporných čísel.]

N2. Nájdite najväčšiu hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Vo všetkých výrazoch písmená označujú ľubovoľné reálne čísla. [a) $\frac{1}{4}$. Ak sú obe čísla t a $1-t$ kladné, napíšte pre ne AG-nerovnosť. Rozmyslite si prípady, keď nie sú obe čísla kladné. Alternatívne možnosťou je úprava na štvorec: $t(1-t) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$. b) $\frac{1}{4}$. Substitúcia $t = uv$ vedie na prípad a). c) $\frac{1}{4}$. Substitúcia $t = u^2 + v^2$ vedie na prípad a).]

D1. Pre reálne čísla a, b nájdite najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

[Maximum je $\frac{1}{2}$ (pre $a = b$). Určite sa stačí obmedziť na prípad, keď $a > 0$ a $b > 0$. Použite AG-nerovnosť pre dvojicu čísel a^2 a b^2. Inak je možné vyjsť z nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$, upravenej na tvar $2ab \leqq a^2 + b^2$.]

D2. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a + b = 2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

[68-B-II-1]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$. [Sčítaním troch nerovností $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $b^2+c^2 \geqq 2bc$, $c^2+a^2 \geqq 2ca$ získame nerovnosť, ktorú potom stačí vydeliť dvoma.]

D4. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu

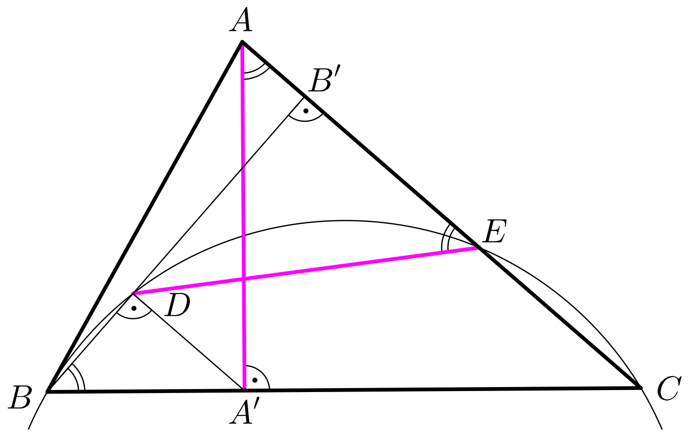
$$V = \frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}.$$

[68-B-I-4]

---

3. *V ostrouhlom trojuholníku ABC sú AA' a BB' jeho výšky. Kolmý priemet bodu A' na výšku BB' označme D. Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi B, C, D pretína stranu AC v jej vnútornom bode E. Dokážte, že $|DE|=|AA'|$.* (Patrik Bak)

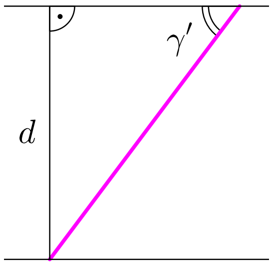
Riešenie. Výšky AA' a BB' ležia vnútri trojuholníka ABC, lebo je podľa zadania ostrouhlý. Preto pre pravouhlé trojuholníky $AA'C$ a $BB'C$ platí, že ich uhly pri vrcholoch A, resp. B (vyznačené na obr. 1) majú tú istú veľkosť γ', ktorá dopĺňa zvyčajne značený uhol γ pri vrchole C do $90°$. Z pravouhlého trojuholníka $BB'C$ s bodom A' vnútri prepony BC ďalej vyplýva, že jeho kolmý priemet D je vnútorným bodom odvesny BB'. Preto má veľkosť γ' aj uhol $A'BD$, čiže CBD.



Obr. 1

Podľa zadania je bod E vnútorným bodom strany AC, ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku BDC. Oblúk BDC tejto kružnice leží v polrovine BCA, takže bod E leží na tomto oblúku, a to medzi bodmi D a C, lebo bod D je vnútorným bodom polroviny ACB. Preto je štvoruholník $BCED$ konvexný a tetivový. Keďže má pri vrchole B ostrý uhol veľkosti γ', má pri protiľahlom vrchole E tupý uhol veľkosti $180° - \gamma'$. K nemu vedľajší uhol AED má teda veľkosť γ', ako je tiež vyznačené na obr. 1. Ukážeme, že to už nám stačí na želaný dôkaz zhodnosti vyfarbených úsečiek DE a AA'.

Priamky AC a $A'D$ sú rovnobežné, pretože sú obe kolmé na výšku BB'. Označme d ich vzdialenosť. Dĺžky oboch skúmaných úsečiek potom môžeme vyjadriť rovnakým zlomkom $d/\sin\gamma'$ (ako je zrejmé z obr. 2). Tým je riešenie úlohy ukončené.



Obr. 2

Poznámka. Bez použitia trigonometrie možno riešenie dokončiť úvahou o priesečníku X úsečiek AA' a DE. Vďaka zhodným uhlom EAX, AEX aj k nim striedavým uhlom $XA'D$, XDA' sú trojuholníky AEX a $A'DX$ rovnoramenné so spoločným hlavným vrcholom X. Platia preto rovnosti $|DX| = |A'X|$ a $|XE| = |XA|$, ich sčítaním už dostaneme potrebný výsledok $|DE| = |AA'|$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ostrouhlý rôznostranný trojuholník ABC je svojimi výškami rozdelený na šesť neprekrývajúcich sa trojuholníkov. Zistite, či niektoré z nich sú podobné. Ak áno, existujú medzi nimi tri navzájom podobné trojuholníky? [Každý trojuholník je podobný s práve jedným z ostatných piatich trojuholníkov. Využite to, že sa jedná o pravouhlé trojuholníky, ktorých ostré vnútorné uhly pri stranách trojuholníka ABC dopĺňajú jeho vnútorné uhly do $90°$.]

N2. Na kružnici so stredom O sú dané body B a C také, že $|\measuredangle BOC| = 120°$. Zvoľme bod A na dlhšom oblúku BC a označme $|\measuredangle AOB| = \delta$.
a) Zistite veľkosť uhla BAC, keď $\delta = 140°$.
b) Zistite, ako máme voliť uhol δ, aby bol uhol BAC čo najväčší.
c) Na kratšom oblúku BC zvolíme bod A'. Zistite, ako máme voliť polohy bodov A, A' (oba ležia na danej kružnici), aby súčet $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle BA'C|$ bol čo najväčší.
[V rovnoramenných trojuholníkoch BOC, COA a AOB spočítajte uhly, alebo ich vyjadrite v závislosti od uhla δ. V a) vyjde $|\measuredangle BAC| = 60°$, rovnako ako v b) nezávisle na voľbe δ. V c) vyjde súčet $180°$ nezávisle na polohe bodu A alebo A'. Tvrdenie c) má známe zovšeobecnenie: Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí jeho protiľahlých uhlov je $180°$.]

D1. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme A', B', C' päty jeho výšok a H jeho ortocentrum (priesečník výšok AA', BB', CC'). Nájdite všetkých 6 tetivových štvoruholníkov s vrcholmi v bodoch A, B, C, A', B', C', H. [Hľadajte pravé uhly a Tálesove kružnice: Body A', B' ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, takže štvoruholník $ABA'B'$ je tetivový a podobne $BCB'C'$ a $CAC'A'$. Body B', C' ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AH, takže štvoruholník $AB'HC'$ je tetivový a podobne $BC'HA'$ a $CA'HB'$.]

D2. V rovine sú dané kružnice m a n, ktoré sa pretínajú v bodoch K a L. Na kružnici m ležia body A, D, K, L a na kružnici n ležia body B, C, K, L v týchto poradiach, pričom body A, L, B ležia na priamke a body C, K, D ležia na inej priamke v týchto poradiach. Dokážte, že $AD \parallel BC$. [Označme $|\measuredangle LBC| = \beta$. Potom $|\measuredangle LKC| = 180° - \beta$, $|\measuredangle LKD| = \beta$ a $|\measuredangle LAD| = 180° - \beta$. Z rovnosti $|\measuredangle LBC| + |\measuredangle LAD| = 180°$ vyplýva $AD \parallel BC$.]

D3. Zvoľme ľubovoľné body A', B', C' vnútri strán BC, CA, AB trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ sa pretínajú v jednom bode. [O priesečníku dvoch kružníc ukážeme, že leží na tretej kružnici. Označme M napríklad priesečník kružníc opísaných trojuholníkom $AB'C'$ a $BC'A'$ a predpokladajme, že bod M leží vnútri trojuholníka ABC. Z tetivového štvoruholníka $AC'MB'$ vyplýva rovnosť $|\measuredangle CB'M| = |\measuredangle AC'M|$. Z tetivového štvoruholníka $BA'MC'$ vyplýva rovnosť $|\measuredangle AC'M| = |\measuredangle BA'M|$. Spolu dostávame rovnosť $|\measuredangle CB'M| = |\measuredangle BA'M|$, takže štvoruholník $CB'MA'$ je tetivový. Podobne sa rozoberú prípady, v ktorých bod M leží zvonka trojuholníka ABC. Bod M sa v literatúre označuje termínom *Miquelov bod.*]

4. *Zistite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra k má sústava rovníc*

$$|x+6|+2|y|=24,$$
$$|x+y|+|x-y|=2k$$

nepárny počet riešení v obore reálnych čísel. (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Všimnime si, že keď je dvojica (x,y) riešením sústavy, je ním aj dvojica $(x,-y)$. Riešenia teda typicky „prichádzajú po dvoch“. Napríklad keby bola dvojica $(x,y)=(2,8)$ riešením, bude ním aj dvojica $(2,-8)$. Len v prípade, keď $y=-y$, čiže $y=0$, nie sú také dve riešenia (x,y) a $(x,-y)$ navzájom rôzne.

Daná sústava tak môže mať nepárny počet riešení iba v prípade, keď pre $y=0$ existuje x spĺňajúce obe rovnice. V takom prípade sa prvá rovnica zjednoduší na $|x+6|=24$, takže nutne je buď $x=18$, alebo $x=-30$. Z druhej rovnice potom vyplýva, že dvojica $(18,0)$ je riešením pre $k=18$ a dvojica $(-30,0)$ je riešením pre $k=30$. V oboch prípadoch neexistuje žiadne iné riešenie (x,y), pre ktoré je $y=0$, takže sústava má nepárny počet riešení ako pre $k=18$, tak aj pre $k=30$, pokiaľ však pre tieto dve k nie je riešení *nekonečne veľa*. Skutočnosť, že zadaná sústava má iba konečný počet riešení, vyplýva (aj pre všeobecné k) z toho, že každé z nich je riešením jednej zo 16 sústav, ktoré dostaneme, keď v „neurčitej“ sústave

$$\pm(x+6)\pm 2y=24,$$
$$\pm(x+y)\pm(x-y)=2k$$

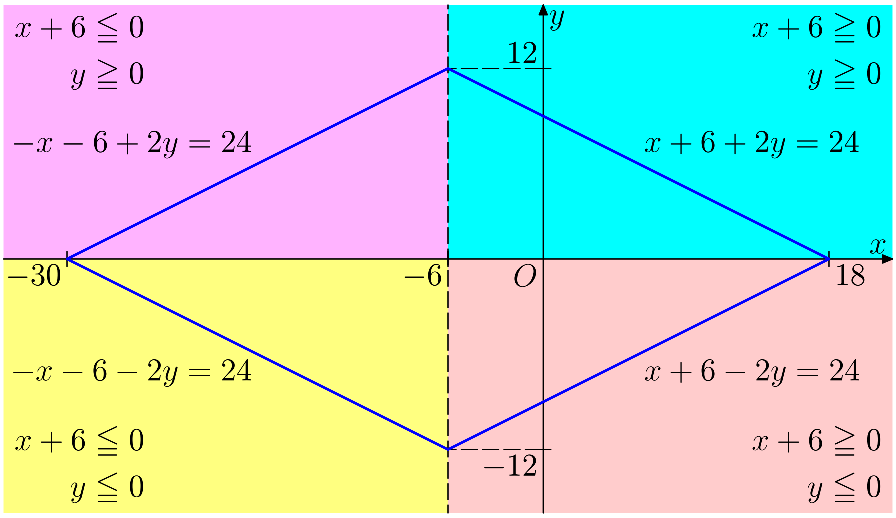
akokoľvek vyberieme znamienka. Vysvetlíme teraz, že každá z týchto 16 sústav má práve jedno riešenie. Ľavá strana druhej rovnice je totiž rovná jednému zo štyroch výrazov $\pm 2x$ alebo $\pm 2y$, preto pri danom k druhá rovnica vedie vždy k jednoznačnému určeniu jednej z neznámych x či y, zatiaľ čo druhá neznáma môže mať ľubovoľnú hodnotu – tú potom zrejme jednoznačne určíme z prvej rovnice po dosadení určenej hodnoty prvej neznámej. Preto má sústava rovníc zo zadania úlohy vždy nanajvýš 16 riešení.[1]

Záver. Hľadané hodnoty parametra k sú práve dve, a to čísla 18 a 30.

Iné riešenie. V rovine zvolíme karteziánsku sústavu súradníc Oxy a pozrieme sa, ako geometricky vyzerá množina bodov $[x,y]$ prislúchajúcich prvej rovnici a ako množina bodov $[x,y]$ prislúchajúcich druhej rovnici. Prienik týchto dvoch množín potom bude tvorený práve tými bodmi $[x,y]$, ktoré zodpovedajú riešeniam zadanej sústavy.

Rozborom znamienok výrazov v absolútnej hodnote (pozri obr. 3) ľahko zistíme, že pre prvú rovnicu sa jedná o hranicu kosoštvorca so stredom v bode $[-6,0]$, ktorého vrcholy sú v bodoch $[18,0]$, $[-6,12]$, $[-30,0]$ a $[-6,-12]$. Napríklad v oblasti, ktorá je vymedzená nerovnosťami $x+6\leqq 0$ a $y\geqq 0$, rovnica zodpovedá priamke $-x-6+2y=$ $=24$ a vyhovujúce body tak vytvoria úsečku, ktorú táto priamka na danej oblasti vytína. Analogicky postupujeme vo zvyšných troch oblastiach.

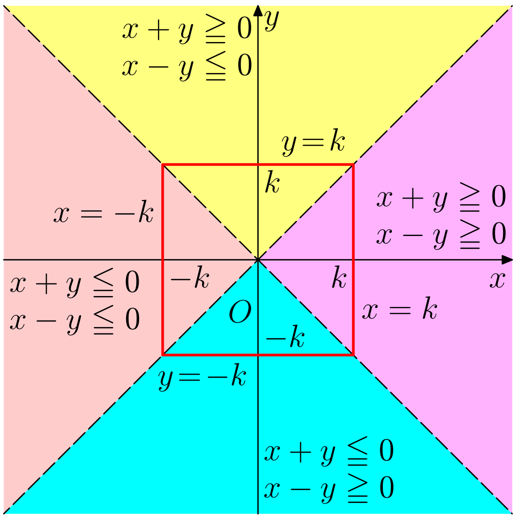
[1] To je samozrejme veľmi hrubý, aj keď v daný moment dostatočný odhad. Podľa grafického postupu, ktorý ďalej opíšeme, sa ľahko zistí, že najväčší počet riešení je rovný číslu 8, a to pre $k\in(10,12)$.



Obr. 3

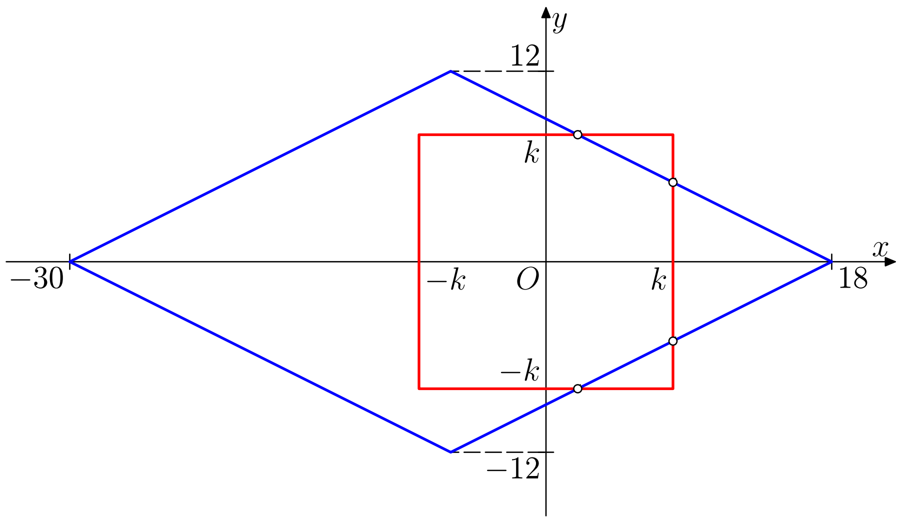
Pre druhú rovnicu najskôr zdôraznime, že ďalej budeme uvažovať iba *kladné* hodnoty parametra k. V prípade $k < 0$ totiž zrejme žiadna dvojica (x, y) vyhovujúca druhej rovnici neexistuje, takže počet riešení sústavy je rovný párnemu číslu 0. V prípade $k = 0$ je to rovnako tak, lebo z druhej rovnice vtedy vyplýva $(x, y) = (0, 0)$, avšak táto dvojica nesplĺňa prvú rovnicu.

Pre každé $k > 0$ podobným rozborom ako pri prvej rovnici zistíme (obr. 4), že množina bodov prislúchajúcich druhej rovnici je tvorená hranicou štvorca so stredom v počiatku, ktorého vrcholy sú v bodoch $[k, k]$, $[-k, k]$, $[-k, -k]$ a $[k, -k]$.



Obr. 4

Predstavme si teraz, že do prvého obrázka s „pevným“ kosoštvorcom začneme prikresľovať „premenlivý“ štvorec, ktorý sa bude meniť podľa toho, ako parameter k bude prebiehať interval všetkých kladných čísel (pozri obr. 5 pre hodnotu $k = 8$).



Obr. 5

Našou úlohou je nájsť všetky tie hodnoty $k > 0$, pri ktorých budú mať hranice oboch štvoruholníkov nepárny počet spoločných bodov (nazývajme ďalej *priesečníkov*). Oba útvary sú súmerné podľa súradnicovej osi x, takže počet priesečníkov nad osou x bude rovnaký ako počet priesečníkov pod osou x. Zaujímajú nás preto iba tie hodnoty parametra k, pre ktoré existuje priesečník na osi x. To nastane iba pre $k = 18$ a $k = 30$. V prípade $k = 18$ budú v celej rovine zrejme existovať celkom tri priesečníky, v prípade $k = 30$ iba jeden.

Rovnako ako v prvom riešení prichádzame k záveru, že $k = 18$ a $k = 30$ sú jediné dve hľadané hodnoty.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V karteziánskej sústave súradníc Oxy znázornite množinu všetkých bodov $[x, y]$, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu a) $|x| + |y| = 7$, b) $|x - 3| + |y| = 7$, c) $|x| + 2|y| = 10$. [a) V každom zo štyroch kvadrantov dostaneme rovnicu priamky, celkovou množinou je hranica štvorca s vrcholmi v bodoch $[7, 0]$, $[0, 7]$, $[-7, 0]$, $[0, -7]$. b) Hranica štvorca posunutá o vektor $(3, 0)$ oproti štvorcu z úlohy a). c) Hranica kosoštvorca s vrcholmi v bodoch $[10, 0]$, $[0, 5]$, $[-10, 0]$, $[0, -5]$.]

N2. Rozmyslite si, ako v karteziánskej sústave súradníc Oxy vyzerá množina všetkých bodov $[x, y]$, ktorých súradnice spĺňajú
a) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$,
b) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$ a zároveň $|x + y| + |x - y| = 10$.
[a) Jedná sa o prienik dvoch polrovín s hraničnými priamkami $x = y$, resp. $x = -y$. Výsledná množina je pravý uhol s vrcholom v počiatku a vnútorným bodom $[0, 1]$. b) Po odstránení absolútnych hodnôt dostanete rovnicu priamky. Prienikom tejto priamky s uhlom z úlohy a) je úsečka s krajnými bodmi $[-5, 5]$ a $[5, 5]$.]

N3. Zdôvodnite, prečo pre ľubovoľnú hodnotu reálneho parametra k má sústava rovníc

$$|x + 6| + 2|y| = 24,$$
$$|x + 6| + |y| = k$$

párny počet riešení v obore reálnych čísel. [Obe zodpovedajúce množiny bodov (hranice kosoštvorca a štvorca) sú súmerné podľa osi x. Teda pre každé riešenie (x, y) tejto sústavy rovníc je aj dvojica $(x, -y)$ jej riešením. Ak teda pre každé riešenie (x, y) platí $y \neq 0$, má sústava párny počet riešení (hranice štvorca a kosoštvorca nemôžu mať nekonečne veľa spoločných bodov). Ak naopak má sústava riešenie tvaru $(x, 0)$, je nutne $k = 24$. Potom existujú práve dve riešenia $(-30, 0)$ a $(18, 0)$.]

D1. Určte všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc

$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia určte. [66-B-I-2]

D2. Použitím grafickej metódy a ďalej potom výpočtom určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$|x| + |y - 1| = 1,$$
$$|x - 1| + |y| = p,$$

pričom p je reálny parameter. [13-A-II-3]

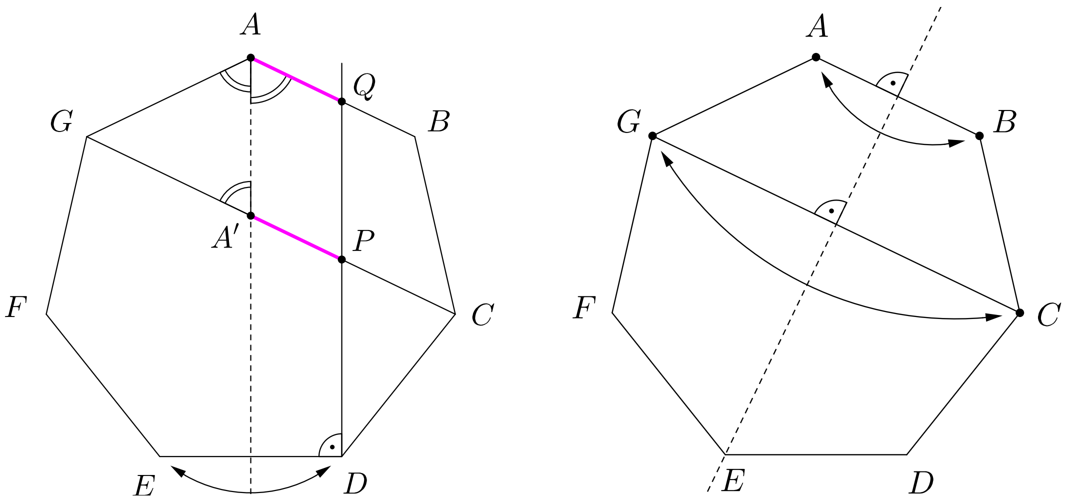
---

5. *Daný je pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Kolmica vedená bodom D na priamku DE pretína priamky CG a AB postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.* (*Marián Poturnay*)

Riešenie. Uvažovaná kolmica na stranu DE vztýčená v bode D najskôr pretne v bode P uhlopriečku CG a potom „opustí“ daný sedemuholník vo vnútornom bode Q jeho strany AB (obr. 6 vľavo). Aby sme úsečky v dokazovanej rovnosti $|GP| = |EF| + |AQ|$ dostali k sebe „bližšie“, zameníme v nej stranu EF zhodnou stranou GA. Budeme tak dokazovať ekvivalentnú rovnosť

$$|GP| = |GA| + |AQ| \tag{1}$$

pre dĺžky troch strán štvoruholníka $AQPG$. Postup, ktorý pritom zvolíme, nám zároveň dosvedčí, že naozaj platí $|GP| > |AQ|$ (ako obr. 6 napovedá).



Obr. 6

Úsečky GP a AQ sú v prvom rade rovnobežné, lebo sú obe kolmé na tú istú os súmernosti celého sedemuholníka, ktorou je spoločná os strany AB a uhlopriečky CG (obr. 6 vpravo). Iná os súmernosti celého sedemuholníka, konkrétne os strany DE, prechádza vrcholom A a je rovnobežná s priamkou PQ. Keďže navyše leží v polrovine PQG, pretína táto os uhlopriečku CG v bode, ktorý leží medzi bodmi P, G a ktorý označíme A' (obr. 6 vľavo). Vďaka $A' \in GP$ platí rovnosť $|GP| = |GA'| + |A'P|$, navyše z relácií $A'P \parallel AQ$ a $PQ \parallel A'A$ vyplýva, že štvoruholník $AQPA'$ je rovnobežník, a teda $|A'P| = |AQ|$. Rovnosti z poslednej vety dokopy znamenajú, že

$$|GP| = |GA'| + |AQ|.$$

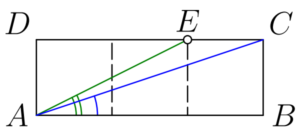
Týmto výsledkom je nerovnosť $|GP| > |AQ|$ potvrdená. Významnejšie pre nás je však porovnanie s rovnosťou (1), ktorú máme dokázať. Vidíme, že takú úlohu splníme, akonáhle overíme rovnosť $|GA| = |GA'|$. Rovnoramennosť trojuholníka $AA'G$ však vyplýva zo zhodnosti troch uhlov vyznačených na obr. 6 vľavo: uhly QAA', $AA'G$ sú striedavé uhly medzi rovnobežkami AB, CG a zhodnosť uhlov QAA', GAA' vyplýva z toho, že polpriamka AA' ako os súmernosti celého sedemuholníka rozpoľuje jeho vnútorný uhol GAB.

Návodné a doplňajúce úlohy:

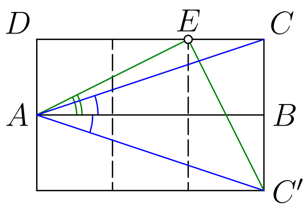
N1. Rozmyslite si, že pravidelný sedemuholník je osovo súmerný a každá jeho uhlopriečka je rovnobežná s niektorou z jeho strán. [Os ktorejkoľvek strany sedemuholníka je jeho osou súmernosti. Rovnobežnosť vybranej uhlopriečky s vhodnou stranou dokážte z osovej súmernosti.]

D1. Majme ostrouhlý trojuholník ABC so štandardne označenými uhlami. Predpokladajme, že platí $|AB| < |AC|$. Na strane AC zvoľme bod D tak, aby platilo $|\measuredangle CBD| = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Dokážte, že $|AB| + |CD| = |AC|$. [Dokážte, že $|AB| = |AD|$. Na to stačí overiť rovnosť $|\measuredangle ABD| = |\measuredangle ADB|$.]

D2. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| = 3|BC|$ a na strane CD je zvolený bod E tak, že $|BC| = |CE|$. Dokážte, že $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle BAE| = 45°$. [Obdĺžnik $ABCD$ s uhlopriečkou

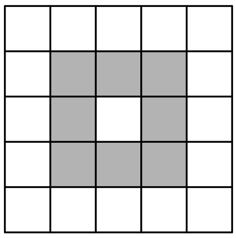


AC zobrazte v osovej súmernosti podľa AB. Bod C sa zobrazí na C'. Dokážte, že trojuholník $AC'E$ je rovnoramenný a pravouhlý.]



---

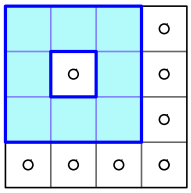
6. *Na pláne s rozmermi* 12×12 *štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca* 3×3 *(na obr. 7 je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz?* (Jozef Rajník)



Obr. 7

Riešenie. V prvej časti riešenia vysvetlíme, prečo v každom štvorci 4×4, ktorý je časťou daného plánu 12×12, musia byť zasiahnuté výstrelom aspoň dve políčka.

Uvažujme ľubovoľný taký štvorec 4×4. Loď, ktorú v ňom umiestnime ako na obr. 8 do ľavého horného rohu štvorca, neohrozí výstrel na ktorékoľvek z ôsmich políčok, ktoré sú na obrázku označené bodkou.



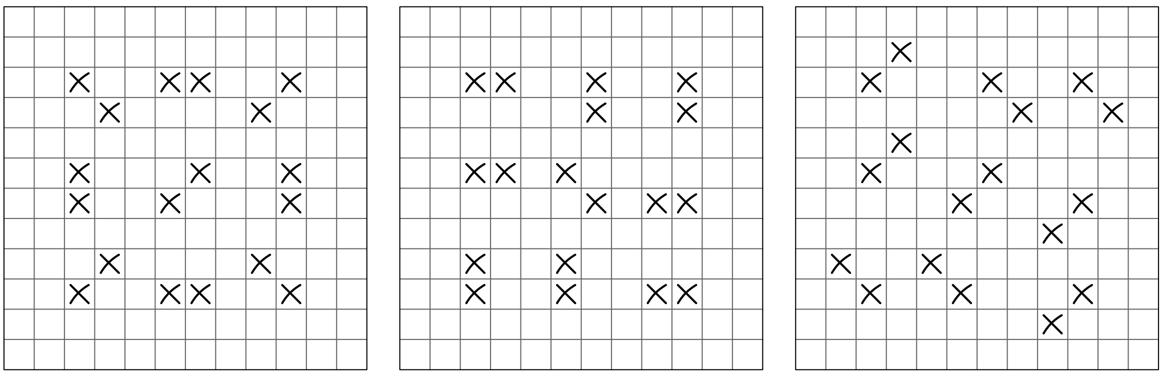
Obr. 8

Keď zopakujeme túto úvahu pre lode umiestnené do zvyšných troch rohov daného štvorca 4×4, označenie bodkou zrejme získa všetkých jeho 16 políčok. (Na to iba stačí obr. 8 pootočiť v jednom smere o $90°$, $180°$ a $270°$.)

Tvrdenie z prvej vety nášho riešenia je tak dokázané. Doplňme ho (len pre zaujímavosť) o zrejmé konštatovanie, že dvoma vhodnými výstrelmi na štvorec 4×4 už v ňom akokoľvek umiestnenú loď aspoň raz zasiahneme.[2]

Teraz sa už budeme venovať celému štvorcu 12×12. Ten zrejmým spôsobom rozdelíme na 9 neprekrývajúcich sa štvorcov 4×4. Ako už vieme, v každom z nich musíme vystreliť na aspoň dve políčka, takže v celom štvorci 12×12 musíme vystreliť na aspoň $9 \cdot 2 = 18$ políčok. Aj keď vieme, že pre každý štvorec 4×4 dva výstrely stačia, záver o tom, že 18 výstrelov stačí pre celý štvorec 12×12, predchádzajúca úvaha ešte zďaleka nedokazuje! Loď možno totiž umiestniť tak, aby neležala celá v žiadnom z deviatich zostrojených štvorcov 4×4.

Spomenutú hypotézu o dostatočnom počte 18 výstrelov je nutné zdôvodniť, najjednoduchšie (jedným) príkladom vyhovujúcej voľby 18 zasiahnutých políčok, ktorú možno nájsť „cestou pokusov a omylov“. Takých príkladov je veľa – na obr. 9 sú uvedené tri z nich, ktoré sú navyše niečím zaujímavé.



Obr. 9

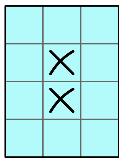
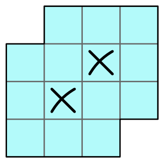
Výstrely v prvom príklade sú súmerné podľa oboch diagonál, v druhom a treťom podľa stredu celého štvorca. Navyše v prvých dvoch príkladoch je bez zásahu polovica riadkov aj polovica stĺpcov. V treťom príklade nie sú zasiahnuté žiadne dve políčka so spoločnou stranou. Naopak príklad, keď zasiahnuté políčka tvoria deväť dvojíc sa spoločnou stranou, dostaneme jednoduchou úpravou obrázka uprostred: „rušivú“ dvojicu zásahov stredového štvorca 2×2 v ňom dáme pod seba.

Poznámka. Opíšme predsa len postup, ako príklad vyhovujúcej voľby 18 výstrelov pomerne ľahko zostrojiť a ako súčasne overiť jeho správnosť bez toho, aby sme pri skúške museli s loďou „cestovať“ po celom pláne 12×12.

[2] Opisu všetkých vyhovujúcich dvojíc zásahov štvorca 4×4 venujeme dopĺňajúcu úlohu D2.

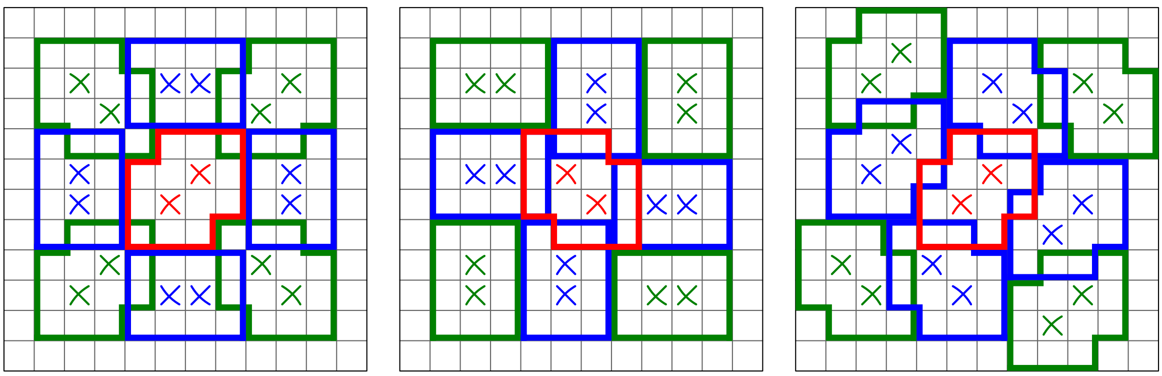
Nazvime *stredovým* políčkom (umiestnenej) lode to políčko, ktoré leží uprostred štvorca 3×3, v ktorom sa loď nachádza. Je zrejmé, že stredovými políčkami lodí môžu byť práve políčka vnútorného štvorca 10×10 daného plánu 12×12. Tento štvorec označíme $\mathcal{C}$. Dve (rôzne) políčka plánu nazveme *susedné*, ak majú spoločný aspoň jeden vrchol.

Pri vyhovujúcej voľbe zasiahnutých políčok nemôže žiadne z nich, ktoré leží vo štvorci $\mathcal{C}$, zostať „osamotené“, t. j. musí sa vystreliť aj na niektoré z ôsmich s ním susediacich políčok. Obmedzme preto našu konštrukciu iba na tie voľby 18 výstrelov, ktorými bude zasiahnutých 9 dvojíc susedných políčok vo štvorci $\mathcal{C}$. Na obr. 10 sú uvedené príklady dvoch takých dvojíc. Vždy keď sa bude jednať o dvojicu políčok so spoločnou stranou, zasiahnutá bude (aspoň raz) každá loď so stredovým políčkom z útvaru zhodného s vykresleným útvarom $\mathcal{U}$. Pri dvojiciach políčok s jediným spoločným vrcholom budú zasiahnuté všetky lode so stredovým políčkom z útvaru zhodného s útvarom $\mathcal{V}$.

$\mathcal{U}$:  $\mathcal{V}$: 

Obr. 10

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že našou úlohou je *rozmiestniť deväť útvarov* do celého plánu 12×12 tak, aby každý z nich bol zhodný s $\mathcal{U}$ alebo $\mathcal{V}$ a aby v ich zjednotení ležal celý vnútorný štvorec $\mathcal{C}$. Príklady takých rozmiestnení, ktoré zodpovedajú trom príkladom, ktoré sme uviedli v závere riešenia na obr. 9, vidíte na obr. 11. Do jednotlivých útvarov sme prikreslili aj dvojice prislúchajúcich zásahov.



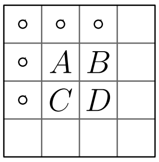
Obr. 11

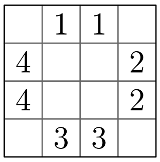
Návodné a dopĺňajúce úlohy:

N1. Súťažnú úlohu „zmenšíme“. Vyriešte postupne tri úlohy, v ktorých plán 12×12 nahradíme plánom a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6. [V úlohách a) aj b) stačia dva výstrely, v c) štyri výstrely. Plán 6×6 rozdeľte na neprekrývajúce sa štvorce 3×3.]

D1. Na pláne s rozmermi 6×6 štvorčekov sa nachádza loď tvaru štvorca 2×2. Zdôvodnite, že treba najmenej 9 výstrelov, aby sme mali istotu, že sme loď zasiahli. [Plán 6×6 rozdeľte na 9 neprekrývajúcich sa štvorcov 2×2.]

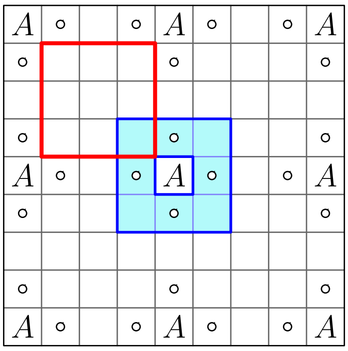
D2. Určte, koľko je všetkých dvojíc políčok daného štvorca 4×4, ktorých zásahom dosiahneme s istotou aj zásah lode zo zadania súťažnej úlohy, ktorá je v tomto štvorci akokoľvek umiestnená. [Je ich 34. Všetky vyhovujúce dvojice políčok rozdeľte do troch skupín podľa toho, koľko je v nich políčok vnútorného štvorca 2×2 (políčka A, B, C, D na obrázku vľavo). Potom dokážte: V jednej skupine sú všetky dvojice políčok z kvarteta $\mathcal{K} = \{A, B, C, D\}$. V druhej skupine sú všetky dvojice tvorené vždy jedným políčkom $X \in \mathcal{K}$ a jedným z piatich políčok $Y \notin \mathcal{K}$, ktoré majú s X aspoň jeden spoločný vrchol – pre políčko $X = A$ sú na obrázku vľavo vyznačené bodkou. V tretej skupine sú práve také dvojice políčok, ktoré sú na obrázku vpravo označené rôznymi číslami jednej parity.

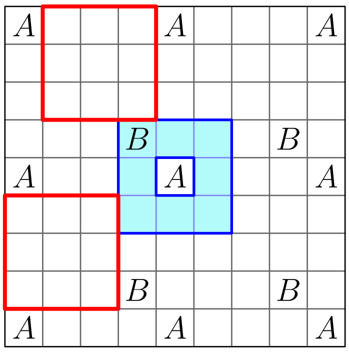




Hľadaný počet je tak rovný $6 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 34$.]

D3. Dokážte, že podmienku súťažnej úlohy *je nemožné* splniť tak, že celý plán 12×12 rozdelíme na 9 štvorcov 4×4 a potom v každom z nich vystrelíme na dve políčka, a to na rovnakých dvoch miestach vo všetkých 9 štvorcoch. [Označíme rovnakým z písmen A, B tie zasiahnuté políčka, ktoré sú na rovnakom mieste vo všetkých deviatich štvorcoch. Políčka A tak sú rozmiestnené v istom štvorci 9×9, ako vidíme na obrázku vľavo. Pre políčka B ho to podobne.

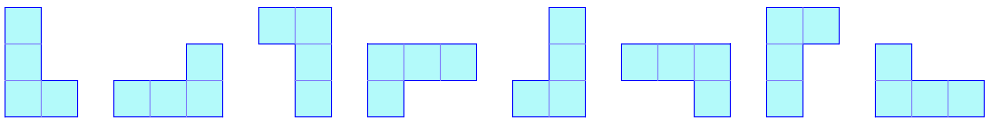




Uvažujme loď v polohe, pri ktorej obklopuje políčko A v strede štvorca 9×9. Aby táto loď bola zasiahnutá, musí v niektorom z ôsmich jej políčok stáť B. Ak sa jedná o jedno zo štyroch modrých políčok označených bodkou, tak označenie bodkou majú na obrázku vľavo všetky políčka B z nášho štvorca 9×9, v ktorom teda môžeme nájsť štvorce 3×3 bez zásahu, dokonca aj bez bodiek – jeden zo štyroch takých je na rovnakom obrázku vľavo vyznačený. Ak je uvažovaná loď zasiahnutá v jednom zo štyroch políčok v jej rohoch, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sa jedná o ľavý horný roh (inak stačí štvorec na obrázku vľavo pootočiť). V uvažovanom štvorci 9×9 sa potom nachádzajú práve 4 políčka B – pozri obrázok vpravo, v ktorom sú navyše vyznačené dva z ôsmich štvorcov 3×3 bez zásahu.]

D4. Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. [58-B-I-4]

D5. Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď majúca niektorý z tvarov na obrázku.



Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. a) Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode. b) Zdôvodnite, že sedem otázok vo všeobecnosti takú istotu nedáva. [58-B-II-2]

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020