70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh domáceho kola kategórie C

---

1. *Určte všetky dvojice* (m, n) *prirodzených čísel, pre ktoré platí*

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

pričom $s(a)$ *označuje ciferný súčet prirodzeného čísla* a. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Obe čísla m a n sú evidentne dvojciferné. Nech teda $m = 10a + b$ a $n = 10c + d$, pričom a, b, c, d sú cifry desiatkovej sústavy ($a \neq 0 \neq c$). Podľa zadania má platiť

$$m + s(n) = (10a + b) + (c + d) = 70, \qquad (1)$$
$$n + s(m) = (10c + d) + (a + b) = 70. \qquad (2)$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme $9(a - c) = 0$, a teda $a = c$. Zámenou c za a obe rovnice (1) a (2) prejdú na rovnakú rovnicu $11a + (b + d) = 70$. Vzhľadom na to, že $0 \leqq b + d \leqq 18$, získame pre a odhady $52 \leqq 11a \leqq 70$. Z toho bezprostredne vyplýva, že buď $a = 5$, alebo $a = 6$. V prvom prípade (pre $a = c = 5$) potom z podmienky $11a + (b + d) = 70$ dostaneme $b + d = 15$, t. j. $(b, d) \in \{(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)\}$. V druhom prípade (pre $a = c = 6$) dostávame $b + d = 4$, a teda $(b, d) \in \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$. Skúška nie je nutná, lebo máme zaručenú platnosť oboch rovníc (1) a (2).

Záver. Úloha má 9 riešení, ktorými sú dvojice $(m, n) \in \{(56, 59), (57, 58), (58, 57), (59, 56), (60, 64), (61, 63), (62, 62), (63, 61), (64, 60)\}$.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojciferné čísla, ktoré sú rovné trojnásobku svojho ciferného súčtu. [Označme $n = \overline{ab}$, potom $n = 10a + b = 3(a + b)$, t. j. $7a = 2b$. Keďže čísla 2 a 7 sú nesúdeliteľné, je $b = 7$ a $a = 2$ ($a \neq 0$), a teda $n = 27$.]

N2. Určte všetky dvojciferné čísla, ktoré sú rovné súčtu svojej desiatkovej cifry a druhej mocniny jednotkovej cifry. [Pre hľadané číslo $n = \overline{ab}$ platí $n = 10a + b = a + b^2$, t. j. $9a = b(b - 1)$. Vzhľadom na to, že čísla b a $b - 1$ sú nesúdeliteľné, je buď $9 \mid b$, alebo $9 \mid (b - 1)$. Zadaniu úlohy vyhovuje iba $n = 89$.]

N3. Určte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

$$n + s(n) = 2\,019,$$

pričom $s(n)$ označuje ciferný súčet čísla n. [69-C-S-1]

N4. V roku 2000 Alena zistila, že jej vek je rovný súčtu cifier roku, v ktorom sa narodila. Koľko má rokov v roku 2020? [Súčet cifier roku jej narodenia je rovný nanajvýš 28 ($= 1 + 9 + 9 + 9$). Rok jej narodenia je teda štvorciferné číslo tvaru $\overline{19xy}$, pre ktoré platí $2000 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$. Z toho po úprave máme $90 = 11x + 2y$, odkiaľ zrejme $x = 8$ a $y = 1$. Vek Aleny v roku 2020 je teda 39 rokov.]

D1. Určte všetky štvorciferné čísla, ktoré sú štyrikrát menšie ako číslo napísané rovnakými ciframi, avšak v opačnom poradí. [Označme $\overline{abcd}$ hľadané číslo. Potom platí $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$. Cifra a musí byť párna a súčasne $a \leqq 2$. Teda $a = 2$, a teda $d = 8$. Jediným riešením je potom číslo 2178.]

D2. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69-C-I-1]

2. *Určte, pre ktoré prirodzené čísla n možno tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 2 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0.* (Ján Mazák)

Riešenie. Zvoľme ľubovoľný riadok (príp. stĺpec) štvorcovej tabuľky $n \times n$, ktorá je vyplnená číslami 2 a -1. Označme v ňom d počet čísel 2 a p počet čísel -1. Potom $d + p = n$ a podľa zadania úlohy má platiť tiež $2d - p = 0$. Sčítaním týchto dvoch rovností dostaneme $3d = n$, čo znamená, že číslo n je *nutne* deliteľné tromi, t. j. $n = 3k$, pričom k je prirodzené číslo.

Ukážeme, že táto podmienka je aj postačujúca. Pre ľubovoľné $n = 3k$ rozdelíme tabuľku $n \times n$ zrejmým spôsobom na k^2 menších štvorcových tabuliek 3×3. Ľahko sa vidí, že každú z týchto menších tabuliek 3×3 možno vyplniť požadovaným spôsobom – napríklad tak, že čísla 2 napíšeme do všetkých troch políčok jednej z jej diagonál a do šiestich zvyšných políčok tejto tabuľky napíšeme čísla -1. Celá štvorcová tabuľka $n \times n$ potom spĺňa podmienku úlohy, keďže ju spĺňa každá z k^2 vytvorených tabuliek 3×3.

Záver. Daným spôsobom možno vyplniť práve tie tabuľky $n \times n$, kde n je prirodzené číslo, ktoré je deliteľné tromi.

Návodné a doplňujúce úlohy:

- N1. Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol deliteľný a) dvoma, b) troma. [a) Nedá sa – ak by súčet čísel už len v každom riadku tabuľky bol deliteľný dvoma, bol by aj súčet všetkých čísel v tabuľke deliteľný dvoma. Ich súčet je však rovný 45. b) Áno – ľahko možno nájsť konkrétny príklad.]
- N2. Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n možno štvorcovú tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 1 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0. [Pre každé párne číslo n možno tabuľku $n \times n$ požadovaným spôsobom vyplniť podľa vzoru čierno-bielej šachovnice. Pre nepárne n sa to nedá, lebo v žiadnom riadku (stĺpci) nemôže byť rovnaký počet čísel -1 a 1.]
- N3. Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a aby súčet všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach bol rovnaký (dostaneme tzv. *magický štvorec*). [Keďže súčet daných deviatich čísel je rovný 45, musí byť súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci rovný $45 : 3 = 15$, čo je nepárne číslo. Nepárnych čísel je v tabuľke o jedno viac ako párnych. Navyše $1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 10$. Ak je teda v prostrednom políčku tabuľky číslo 5, ľahko nájdeme konkrétny príklad možného vyplnenia tejto tabuľky.]
- D1. Tabuľka 3×3 je vyplnená navzájom rôznymi prirodzenými číslami tak, že v každom riadku aj stĺpci je súčet krajných čísel rovný číslu napísanému medzi nimi. Zistite, aké najmenšie číslo môže byť napísané uprostred tabuľky. [69-C-S-2]
- D2. Koľkými spôsobmi možno do políčok tabuľky 2×3 vpísať čísla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak, aby každé bolo použité práve raz a aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol deliteľný troma? [Matematický klokan 2018, kat. Junior, úloha 21 (48 možností).]

3. *V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme postupne I a U stred kružnice jemu vpísanej a dotykový bod tejto kružnice s odvesnou BC. Určte, aký je pomer $|AC| : |BC|$, ak sú uhly CAU a CBI zhodné.* (Jaroslav Zhouf)

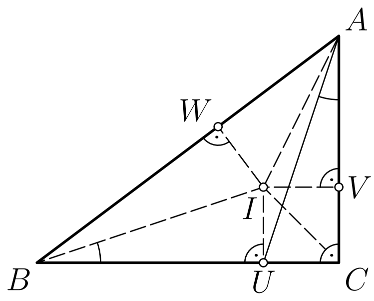
Riešenie. Označme V, W dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ABC postupne so stranami AC, AB a ϱ jej polomer. Ľahko sa vidí, že štvoruholník $CVIU$ je štvorec so stranou dĺžky ϱ. Z osových súmerností podľa priamok AI a BI tak pri zvyčajnom označení dĺžok odvesien trojuholníka ABC vyplýva

$$|AW| = |AV| = b - \varrho \quad \text{a} \quad |BW| = |BU| = a - \varrho.$$

Z toho dostávame vyjadrenie dĺžky prepony AB v tvare

$$|AB| = |AW| + |BW| = a + b - 2\varrho,$$

takže podľa Pytagorovej vety platí rovnosť $a^2 + b^2 = (a + b - 2\varrho)^2$.



Obr. 1

Až teraz využijeme podmienku úlohy, podľa ktorej sa pravouhlé trojuholníky ACU a BUI zhodujú v ostrých uhloch pri vrcholoch A a B (vyznačených na obr. 1). Keďže sa (vo všeobecnosti) zhodujú aj v odvesnách CU a UI, v našej situácii sa jedná (podľa vety *usu*) o dva zhodné trojuholníky. To nás vedie k rovnosti $|AC| = |BU|$, čiže $b = a - \varrho$, teda $\varrho = a - b$. Dosadením takého ϱ do vyššie upravenej rovnosti z Pytagorovej vety dostaneme

$$a^2 + b^2 = (3b - a)^2.$$

Po roznásobení a jednoduchej úprave vyjde $b(4b - 3a) = 0$, odkiaľ $3a = 4b$.

Záver. Pre hľadaný pomer platí $|AC| : |BC| = b : a = 3 : 4$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nech D, E, F sú dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ABC postupne so stranami BC, CA, AB. Pomocou ich dĺžok a, b, c vyjadrite dĺžky úsekov, na ktoré body D, E, F rozdeľujú jednotlivé strany. [Platí $|AE| = |AF| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$, $|CD| = |CE| = s - c$, pričom $2s = a + b + c$.]

N2. Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4. [61-C-I-2]

N3. Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$. [61-C-S-2]

N4. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán, ktorých kružnica vpísaná má polomer 2. [69-C-S-3]

D1. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Kolmým priemetom kružnice vpísanej danému trojuholníku na preponu AB je úsečka MN. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je súčasne stredom kružnice opísanej trojuholníku MNC. [Označme I stred kružnice vpísanej a U, V, W postupne jeho kolmé priemety na strany BC, CA, AB. Trojuholníky IMW, INW a IVC sú zrejme zhodné rovnoramenné pravouhlé trojuholníky (s odvesnami veľkosti ϱ polomeru vpísanej kružnice, lebo $|MN| = 2\varrho$). Preto $|IM| = |IN| = |IC|$.]

4. *Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz*

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1. (*Michal Rolínek, Pavel Calábek*)

Riešenie. Zlomky v danom výraze majú zmysel, pretože ich menovatele sú podľa zadania kladné čísla. Vďaka podmienke $a+b+c=1$ pre prvý zlomok platí

$$\frac{a+bc}{a+b}=\frac{(a+b)+(bc-b)}{a+b}=1-b\cdot\frac{1-c}{a+b}=1-b\cdot\frac{a+b}{a+b}=1-b.$$

Analogicky druhý, resp. tretí zlomok nadobúda postupne hodnoty $1-c$, resp. $1-a$. Z toho vyplýva

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a}=(1-b)+(1-c)+(1-a)=3-(a+b+c)=2,$$

čo je za podmienok úlohy jediná možná hodnota daného výrazu.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech a, b, c sú nenulové reálne čísla, ktorých súčet je rovný 0. Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

[Využite identitu $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$. Hodnota daného výrazu je rovná -2.]

N2. Nech a, b, c sú nenulové reálne čísla, ktorých súčet je rovný 0. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

[Menovatele zlomkov na ľavej strane nahraďte číslami $-c$, $-a$, $-b$ a po sčítaní takto upravených zlomkov uplatnite rovnakú identitu ako pri riešení N1.]

N3. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. Dokážte, že platí rovnosť

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

[Prvý zlomok rozšírte z, druhý xz a trikrát využite podmienku $xyz=1$.]

D1. Ak reálne čísla a, b, c spĺňajú rovnicu

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

tak platí $a+b+c=0$ alebo $a=b=c$. Dokážte. [18–B–I–1]

D2. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)$, ak sú a_1, a_2, a_3 kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. [Dokážte a potom medzi sebou vynásobte nerovnosti $1+a_i\geqq 2\sqrt{a_i}$ pre $i=1,2,3$.]

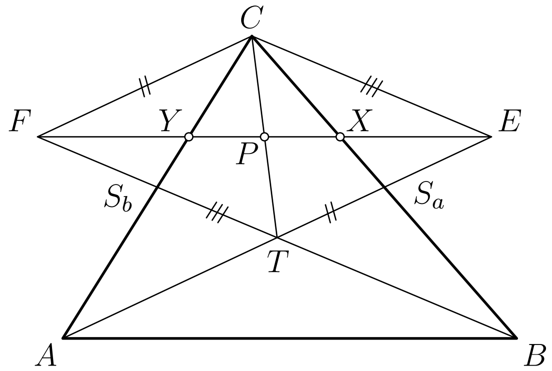
D3. Pre nezáporné reálne čísla a, b, c platí $a+b+c=1$. Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

[69-C-II-4]

5. *Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Na priamkach AT a BT sú zvolené postupne body E a F tak, že štvoruholník $TECF$ je rovnobežník. Dokážte, že úsečky AC a BC delia úsečku EF na tri zhodné časti.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Označme S_a, S_b postupne stredy strán BC, AC daného trojuholníka ABC a X, Y postupne priesečníky dvojíc úsečiek EF a BC, EF a AC. Napokon, nech P je priesečník uhlopriečok rovnobežníka $TECF$. Zhodnosť a rovnobežnosť jeho protiľahlých strán je vyznačená na obr. 2.



Obr. 2

Keďže S_a je stredom strany BC a $AE \parallel CF$, je úsečka TS_a strednou priečkou v trojuholníku BCF a jej dĺžka je polovicou dĺžky úsečky CF, teda aj polovicou dĺžky úsečky TE. Bod S_a je teda stredom strany TE v trojuholníku TEC. Z toho vyplýva, že bod X je jeho ťažiskom, lebo úsečky CS_a a EP sú jeho ťažnicami, ktoré sa pretínajú práve v bode X. Analogicky Y je ťažiskom trojuholníka CFT, ktorý je navyše súmerne združený s trojuholníkom TEC podľa stredu S. Z vlastností dĺžok úsekov, ktoré vytínajú ťažiská X a Y na ťažniciach EP a FP v zhodných trojuholníkoch TEC a CFT, už bezprostredne vyplýva tvrdenie úlohy.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech D, E sú postupne stredy strán AB, BC trojuholníka ABC a F je stred úsečky AD. Dokážte, že priamka CD rozpoľuje úsečku EF. [68-C-S-3]

N2. Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B sú postupne stredmi úsečiek CF a CG. Priamka CD pretína priamku FB v bode I a priamka CE pretína priamku AG v bode J. Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG. [68-C-I-2]

N3. Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme M stred strany BC. Na polpriamke opačnej k BA leží bod D taký, že $|AB| = |BD|$. Podobne na polpriamke opačnej k CA leží bod E taký, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE pretínajú stranu BC postupne v bodoch P, Q. Dokážte, že body P, Q, M rozdeľujú úsečku BC na štyri rovnako dlhé časti. [8. CPS MO juniorov (2019). Pre dôkaz, že P je stred BM, uvažujte strednú priečku BS v trojuholníku ADT. Úsečka TP je strednou priečkou v trojuholníku BMS.]

6. *Na tabuli je napísaných niekoľko prirodzených čísel od 1 do 100, pričom žiadne z nich nie je deliteľné dvojciferným prvočíslom a súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.*

a) Určte najväčší možný počet čísel na tabuli.

b) Určte najväčší možný súčet čísel na tabuli. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Každé číslo, ktoré je napísané na tabuli, má jednoznačne určený prvočíselný rozklad $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, pričom a, b, c, d sú vhodné celé nezáporné čísla. Podľa parít čísel v štvorici (a, b, c, d) zavedieme „typ" čísla n ako štvoricu (A, B, C, D), pričom každé z písmen je buď písmeno P (znak pre párne číslo), alebo písmeno N (znak pre nepárne číslo). Teda napríklad číslo 60 s rozkladom $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0$ je typu (P, N, N, P).

Uvedomme si, že prirodzené číslo je druhou mocninou práve vtedy, keď v jeho rozklade na súčin prvočísel má každé prvočíslo párny počet zastúpení. Také zastúpenie zrejme majú prvočísla v rozklade súčinu $A \cdot B$ práve tých čísel A a B z tabule, ktoré sú toho istého typu. Preto je podmienka úlohy pre súčiny dvojíc čísel splnená práve vtedy, keď každé dve čísla napísané na tabuli majú rôzny typ.

Obe zadané úlohy budeme riešiť súčasne. V prvej z nich máme zistiť, aký najväčší *počet* čísel môže byť na tabuli napísaný. Odpoveď je podľa predchádzajúceho odseku rovná počtu tých zo zavedených typov (A, B, C, D), ktoré majú medzi číslami od 1 do 100 svoje zastúpenie. Budú to zrejme práve tie typy, ktorých *najmenší zástupca* je číslo, ktoré neprevyšuje 100.

Všetkých typov (A, B, C, D) je zrejme $2^4 = 16$. Pre každý z nich preto najskôr určíme *najmenšie* číslo k tohto typu. Bude ním určite číslo $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, pričom najmenšie možné mocnitele $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ vyberieme podľa štvorice znakov (A, B, C, D) – pozri prvé dva stĺpce nižšie uvedenej tabuľky. Chýbajú v nej typy (P, N, N, N) a (N, N, N, N), lebo pre ne sú najmenší zástupcovia $k = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ a $k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ väčší ako 100. Zisťujeme tak, že najväčší možný počet čísel na tabuli je rovný $16 - 2 = 14$. (Príkladom je 14 hodnôt k z tabuľky.)

(P, P, P, P)	$k = 1$	$K = 10^2 = 100$
(N, P, P, P)	$k = 2$	$K = 2 \cdot 7^2 = 98$
(P, N, P, P)	$k = 3$	$K = 3 \cdot 5^2 = 75$
(P, P, N, P)	$k = 5$	$K = 5 \cdot 4^2 = 80$
(P, P, P, N)	$k = 7$	$K = 7 \cdot 3^2 = 63$
(N, N, P, P)	$k = 2 \cdot 3 = 6$	$K = 6 \cdot 4^2 = 96$
(N, P, N, P)	$k = 2 \cdot 5 = 10$	$K = 10 \cdot 3^2 = 90$
(N, P, P, N)	$k = 2 \cdot 7 = 14$	$K = 14 \cdot 2^2 = 56$
(P, N, N, P)	$k = 3 \cdot 5 = 15$	$K = 15 \cdot 2^2 = 60$
(P, N, P, N)	$k = 3 \cdot 7 = 21$	$K = 21 \cdot 2^2 = 84$
(P, P, N, N)	$k = 5 \cdot 7 = 35$	$K = 35$
(N, N, N, P)	$k = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	$K = 30$
(N, N, P, N)	$k = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$	$K = 42$
(N, P, N, N)	$k = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$	$K = 70$

Druhou úlohou je určenie najväčšieho možného *súčtu* čísel na tabuli. Ten zrejme dostaneme tak, že ku každému zo 14 možných typov nájdeme jeho najväčšieho zástupcu K medzi číslami od 1 do 100, a týchto 14 hodnôt K potom sčítame. Pri každom type však už poznáme jeho najmenšieho zástupcu k, takže prvých desať[1] najmenších

[1] Jedenáste číslo $12^2 \cdot k$ nebudeme v našom riešení potrebovať pre žiadny zo 14 možných typov, vlastne už $10^2 \cdot k$ je pre každé $k > 1$ väčšie ako 100.

čísel tohto typu má určite tvar

$$k,\ 2^2 \cdot k,\ 3^2 \cdot k,\ 4^2 \cdot k,\ \ldots,\ 10^2 \cdot k.$$

Číslo K teda určíme ako najväčšie z nich, ktoré ešte neprevyšuje 100, a potom ho pre každý typ zapíšeme do tretieho stĺpca tabuľky.

Ako sme už uviedli skôr, v tabuľke je uvedených iba 14 zo 16 možných typov. Čísla zvyšných dvoch typov (P, N, N, N) a (N, N, N, N) na tabuli napísané byť nemôžu, lebo pre súčin troch nutne zastúpených prvočísel 3, 5 a 7 platí $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 100$. Odpoveď na časť a) úlohy tak znie: Najväčší možný *počet* čísel napísaných na tabuli je rovný 14.

Pre čísla napísané na tabuli dosiahneme najväčší súčet, ak sčítame *najväčšie* prípustné čísla z každého zo 14 možných typov, ktoré sme zapísali do pravého stĺpca tabuľky. Z toho vyplýva odpoveď na časť b) úlohy: Najväčší možný *súčet* na tabuli napísaných čísel je

$$100 + 98 + 75 + 80 + 63 + 96 + 90 + 56 + 60 + 84 + 35 + 30 + 42 + 70 = 979.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Aký je najväčší možný počet čísel, ktoré sa dajú vybrať z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ tak, aby súčin žiadnych troch z vybraných čísel nebol deliteľný deviatimi? Uveďte príklad vyhovujúcej podmnožiny a zdôvodnite, prečo nemôže mať väčší počet prvkov. [68-C-S-1]

N2. Aký je najmenší možný súčet štyroch prirodzených čísel takých, že dvojice vytvorené z týchto čísel majú najväčšie spoločné delitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte príklad vyhovujúcej štvorice s takým súčtom a zdôvodnite, prečo neexistuje vyhovujúca štvorica s menším súčtom. [68-C-II-2]

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020