70. ročník Matematickej olympiády 2020/2021

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1. *Pre reálne čísla x, y, z platí*

$$\begin{aligned}|x+y| &= 1-z,\\ |y+z| &= 1-x,\\ |z+x| &= 1-y.\end{aligned}$$

Zistite, aké všetky hodnoty môže nadobúdať súčet $x+y+z$. Pre každý vyhovujúci súčet uveďte príklad prislúchajúcich čísel x, y, z. (*Mária Dományová, Patrik Bak*)

Riešenie. Ak je $x+y \geqq 0$, tak podľa prvej zadanej rovnice platí $x+y = 1-z$, takže hľadaný súčet $x+y+z$ je rovný 1. K rovnakému záveru dôjdeme, keď bude platiť $y+z \geqq 0$ alebo $z+x \geqq 0$. Ostáva posúdiť prípad, keď všetky tri súčty $x+y$, $y+z$, $z+x$ sú záporné. Vtedy možno danú sústavu prepísať na tvar

$$\begin{aligned}-x-y &= 1-z,\\ -y-z &= 1-x,\\ -z-x &= 1-y.\end{aligned} \tag{1}$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme $x+y+z = -3$. Súčet $x+y+z$ teda vždy nadobúda buď hodnotu 1, alebo hodnotu -3. Ukážeme, že obe tieto hodnoty sú na riešeniach zadanej sústavy dosiahnuteľné.

Nájsť potrebné trojice (x, y, z) bude jednoduché. Ako sa totiž ukáže, stačí sa pritom obmedziť na trojice rovnakých čísel $x = y = z$. Vtedy sa zadaná sústava redukuje na jedinú rovnicu $|2x| = 1-x$. Tá má zrejme dve riešenia $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$. Tým zodpovedajú riešenia $(-1,-1,-1)$ a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pôvodnej sústavy, ktoré už potvrdzujú, že oba súčty $x+y+z = -3$ aj $x+y+z = 1$ sú dosiahnuteľné.[1]

Poznámka. Rovnosť $x+y+z = -3$ spĺňa *jediné* riešenie $(-1,-1,-1)$ zadanej sústavy, keďže to je jediné riešenie sústavy (1).[2] Rovnosť $x+y+z = 1$ spĺňa *nekonečne veľa* riešení (x, y, z); všetky sú určené podmienkou

$$(x \leqq 1) \wedge (y \leqq 1) \wedge (z \leqq 1) \wedge (x+y+z = 1).^{3}$$

Prvé tri nerovnosti vyjadrujú, že pravé strany rovníc sústavy sú nezáporné; ak sú splnené, tak z rovnosti $x+y+z = 1$ vyplýva, že sú nezáporné aj súčty $x+y$, $y+z$, $z+x$ (rovné postupne $1-z$, $1-x$, $1-y$), takže (x, y, z) je riešením.

[1] Trojice $(-1,-1,-1)$ a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ sme mohli rýchlejšie získať priamou voľbou $x = y = z$ v rovniciach $x+y+z = -3$, resp. $x+y+z = 1$, a potom sa dosadením presvedčiť, že to sú riešenia.

[2] Ak totiž trojica (x, y, z) spĺňa pôvodnú sústavu, nie však (1), musí byť jeden zo súčtov $x+y$, $y+z$, $z+x$ kladný, takže potom (ako vieme) platí $x+y+z = 1$.

[3] Množinou všetkých takých trojíc (x, y, z) je v karteziánskej sústave súradníc (rovnostranný) trojuholník s vrcholmi $[1, 1, -1]$, $[1, -1, 1]$ a $[-1, 1, 1]$. Z nerovníc $x \leqq 1$, $y \leqq 1$ totiž vyplýva $z = 1 - x - y \geqq -1$ a podobne pre x, y. Vyhovujúce body tak ležia v prieniku kocky s vrcholmi $[\pm 1, \pm 1, \pm 1]$ s rovinou $x+y+z = 1$, čo je vyššie spomenutý trojuholník.

Iné riešenie. Pri označení $s = x + y + z$ možno sústavu prepísať na tvar

$$\begin{aligned} |s - z| &= 1 - z, \\ |s - x| &= 1 - x, \\ |s - y| &= 1 - y. \end{aligned} \tag{2}$$

Považujme ďalej číslo s v sústave (2) za (nezávislý) parameter. Našou úlohou je zistiť, pre ktoré hodnoty s existuje riešenie (x, y, z) sústavy (2) s vlastnosťou $x + y + z = s$.

Ak je $s = 1$, tak riešeniami sústavy (2) sú (podľa definície absolútnej hodnoty) práve tie trojice (x, y, z), pre ktoré platia nerovnosti $1 - z \geqq 0$, $1 - x \geqq 0$, $1 - y \geqq 0$. Príkladom takého riešenia s vlastnosťou $x+y+z = s = 1$ je napríklad trojica $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ostáva posúdiť prípad, keď $s \neq 1$. Vtedy $s - z \neq 1 - z$, takže z prvej rovnice v (2) vyplýva $s - z \neq |s - z|$, čiže $s - z < 0$. Preto možno prvú rovnicu v (2) prepísať ako $-(s-z) = 1-z$, odkiaľ $z = \frac{1}{2}(s+1)$. Analogicky musí platiť $x = \frac{1}{2}(s+1)$ a $y = \frac{1}{2}(s+1)$. Z podmienky $x+y+z = s$ teraz zapísanej ako $\frac{3}{2}(s+1) = s$ vyplýva, že je nutne $s = -3$. Ľahko sa presvedčíme, že zodpovedajúca trojica $(-1, -1, -1)$ je riešením.

Dospeli sme k rovnakému záveru ako v prvom riešení: jediné dve možné hodnoty súčtu $x + y + z$ sú čísla 1 a -3.

Iné riešenie. Ešte jedným algebraickým postupom dokážeme, že $x + y + z \in \{-3, 1\}$. (Otázku dosiahnuteľnosti oboch hodnôt už opakovane posudzovať nebudeme.)

Absolútnych hodnôt v sústave sa zbavíme tak, že každú z troch rovníc umocníme na druhú. Keď ich následne sčítame, dostaneme

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = (1 - z)^2 + (1 - x)^2 + (1 - y)^2.$$

Z toho po jednoduchej úprave dostaneme rovnicu

$$(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) - 3 = 0,$$

ktorá je kvadratickou rovnicou $s^2 + 2s - 3 = 0$ pre skúmaný súčet $s = x + y + z$. Jej korene sú $s = -3$ a $s = 1$. Tým je sľúbený dôkaz ukončený.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 4 body za dôkaz, že súčet $s = x+y+z$ nemôže nadobúdať iné hodnoty ako 1 alebo -3; 1 bod za príklad riešenia (x, y, z) so súčtom $s = 1$; 1 bod za uvedenie (jediného) riešenia $(-1, -1, -1)$ so súčtom $s = -3$.

Za neúplný dôkaz tvrdenia $s \in \{-3, 1\}$ možno získať čiastkové body (napríklad pri neúplnom rozbore možných znamienok súčtov $x + y$, $y + z$, $z + x$), nanajvýš však 2 body, ak je v postupe logická chyba (napríklad zabudnutie nejakého prípadu možných znamienok).

Ak sa riešiteľ snaží opísať množinu všetkých riešení danej sústavy, žiadne body navyše tým nezískava.

---

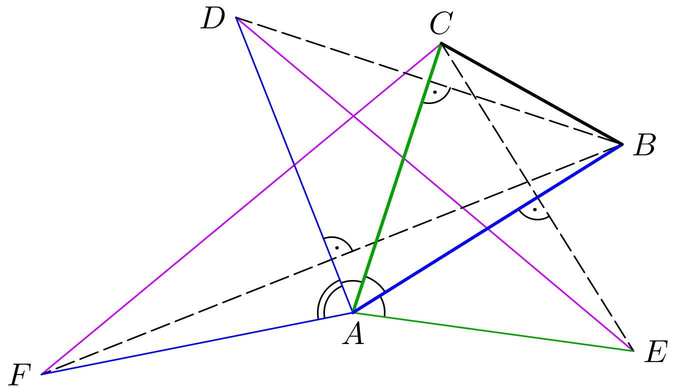
2. *Uvažujme trojuholník ABC, v ktorom je $|\measuredangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osovej súmernosti podľa priamky AC označme D, obraz C podľa AB označme E a obraz B podľa AD označme F. Dokážte, že $|CF| = |DE|$.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Úsečky CF a DE z dokazovanej rovnosti sú stranami trojuholníkov ADE a AFC. Preto stačí dokázať, že tieto dva trojuholníky sú zhodné, $\triangle ADE \cong \triangle AFC$.

Označme $\alpha = |\measuredangle BAC|$. Zdôraznime vopred, že vďaka zadanej podmienke $\alpha < 60°$, ktorá znamená, že $3\alpha < 180°$, budeme môcť počítať veľkosti (konvexných) uhlov so spoločným vrcholom A podľa polôh ich ramien ako na obr. 1.[4]

[4] Použité osové súmernosti totiž zaručujú, že ramená AE, AB, AC, AD, AF ležia v tomto poradí pri otáčaní okolo vrcholu A.

Osové súmernosti, ktoré určujú konštrukciu bodov D, E a F, v prvom rade znamenajú, že platia rovnosti $|AD| = |AB| = |AF|$ a $|AE| = |AC|$, ako sme dvoma farbami vyznačili na obrázku. Ďalším dôsledkom je, že veľkosť α má nielen uhol BAC, ale majú ju aj uhly CAD a EAB, takže konvexný uhol BAD má veľkosť 2α a konvexný uhol EAD má veľkosť 3α. Posledným potrebným dôsledkom súmerností je, že veľkosť 2α má nielen uhol BAD, ale aj uhol DAF, a preto konvexný uhol CAF má veľkosť 3α, teda rovnakú ako skôr uvedený uhol EAD.



Obr. 1

Z odvodených rovností $|AD| = |AF|$, $|AE| = |AC|$ a $|\measuredangle EAD| = |\measuredangle CAF|$ podľa vety *sus* už vyplýva zhodnosť $\triangle ADE \cong \triangle AFC$, ktorú sme chceli dokázať.

Dodajme, že úvahy o zhodných trojuholníkoch ADE, AFC možno bez zmienky o nich opísať úvahou o otočení so stredom v bode A o orientovaný uhol EAC. Podľa výsledkov z tretieho odseku nášho riešenia je pri takom otočení obrazom úsečky DE práve úsečka FC.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 1 bod za uvedenie rovnosti $|AE| = |AC|$; 1 bod za dôkaz rovnosti $|AD| = |AF|$; 1 bod za dôkaz rovností $|\measuredangle EAB| = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle CAD|$; 1 bod za dôkaz $|\measuredangle DAF| = 2|\measuredangle BAC|$ a zvyšné dva body za dokončenie dôkazu použitím vety *sus*, kosínusovej vety či otočením so stredom v A. Z týchto posledných dvoch bodov môže jeden byť udelený pri neúplnom riešení, ak riešiteľ uvedie, že uvedená zhodnosť či otočenie stačia na dokončenie úlohy.

---

3. *Dokážte, že ak pre nejaké kladné celé čísla a, b, c je $3^a \cdot 7^b - 10^c$ kladné dvojciferné číslo, tak je to prvočíslo.* (*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Predpokladajme, že čísla a, b, c sú prirodzené a že $N = 3^a \cdot 7^b - 10^c$ je kladné dvojciferné číslo. Číslo N nie je deliteľné žiadnym zo štyroch najmenších prvočísel 2, 3, 5 a 7, lebo každým z nich je deliteľné práve jedno z čísel $3^a \cdot 7^b$ a 10^c, takže ich rozdiel ním deliteľný nie je.

Piate najmenšie prvočíslo je 11. Z rovnosti $11^2 = 121$ vyplýva, že každé zložené číslo, ktoré nie je deliteľné žiadnym z prvočísel 2, 3, 5, 7, má aspoň tri cifry.[5] Naše dvojciferné číslo N teda nie je zložené, je preto nutne prvočíslo, ako sme mali dokázať.

Poznámka. Je zrejmé, že dvojciferné čísla tvaru $3^a \cdot 7^b - 10^c$ naozaj existujú, napríklad $3 \cdot 7 - 10 = 11$, $3^3 \cdot 7 - 10^2 = 89$, $3 \cdot 7^3 - 10^3 = 29$ a pod.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov. V prípade neúplného riešenia dajte 3 body za pozorovanie, že N nie je deliteľné prvočíslami z množiny $\{2, 3, 5, 7\}$; v prípade, že riešiteľ spomenie nedeliteľnosť iba

[5] Tento (alebo jemu ekvivalentný) záver je v úplnom riešení nutné objasniť. Možno sa pritom odvolať na známy školský poznatok, že každé zložené číslo N má aspoň jedného prvočiniteľa p, ktorý spĺňa nerovnosť $p \leqq \sqrt{N}$.

dvoma z nich, dajte 1 bod, v prípade, že ukáže nedeliteľnosť tromi prvočíslami, dajte 2 body (zmienku, že nie je deliteľné práve jedným z prvočísel, typicky N je nepárne, nebodujte). Ďalšie 3 body dajte za tvrdenie, že každé zložené dvojciferné číslo je deliteľné aspoň jedným z prvočísel 2, 3, 5 alebo 7 (ak nie je toto konštatovanie ničím podložené, strhnite 1 bod).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Ján Brajerčík, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021