

70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5

1. Pán Krbec s kocúrom Kokešom predávali na hrade Kulíkov vstupenky. V sobotu predali 210 detských vstupeniek po 25 grošov a tiež nejaké vstupenky pre dospelých po 50 grošov. Celkom za ten deň utržili 5 950 grošov. Koľko predali vstupeniek pre dospelých?
(Marie Krejčová)

Nápad. Koľko vybrali za vstupenky pre dospelých?

Riešenie. Pán Krbec s kocúrom Kokešom za detské vstupenky vyzbierali celkom $210 \cdot 25 = 5\,250$ grošov. Za vstupenky pre dospelých utržili $5\,950 - 5\,250 = 700$. Týchto vstupeniek teda predali $700 : 50 = 14$ kusov.

2. Deti na tábore hádzali hracou kockou a podľa výsledkov plnili nasledujúce úlohy:

1	choďte 1 km na západ
2	choďte 1 km na východ
3	choďte 1 km na sever
4	choďte 1 km na juh
5	stojte na mieste
6	choďte 3 km na sever

Po piatich hodoch bolo Marekovo družstvo 1 km východne od štartu.

1. Akú trasu mohlo Marekovo družstvo prejsť? Naznačte aspoň štyri možnosti.
2. Aký mohol byť celkový súčet všetkých čísel, ktoré tomuto družstvu padli? Určte všetky možnosti.

(Eva Semerádová)

Nápad. Ktoré kombinácie hodov sa vo svojich následkoch navzájom zrušia?

Riešenie. Keďže Marekovo družstvo skončilo 1 km východne od štartu, musela im aspoň raz padnúť dvojka. Ostatné štyri hody museli byť také, že po splnení prislúchajúcich úloh bolo družstvo na pôvodnom mieste (napr. 3 km na sever a 3 km na juh). Všetky také štvorice hodených čísel sú – až na poradie – nasledujúce:

1 1 2 2, 1 2 3 4, 1 2 5 5, 3 3 4 4, 3 4 5 5, 4 4 4 6, 5 5 5 5.

Spolu s vyššie uvedenou dvojkou dostávame všetky možné súčty čísel, ktoré mohli tomuto družstvu padnúť:

8, 12, 15, 16, 19, 20, 22.

Možných trás, ktoré mohlo Marekovo družstvo prejsť, je nepreberné množstvo. Napr. päťica hodov 2 4 4 4 6 zodpovedá trase 1 km na východ, trikrát 1 km na juh a 3 km na sever. Zámenou poradia týchto hodov možno získať ďalších 19 možností, celkom 20 rôznych trás. V ostatných prípadoch to je obdobné, akurát sa môže stať, že rôzne poradia predstavujú iba rôzne spôsoby prejdenia tej istej trasy (napr. poradia 1 2 1 2 2, 2 1 1 2 2, 1 2 2 1 2). Ak sa v päťici hodených čísel vyskytuje 5 (státie na mieste), počty možných trás sa významne znižujú.

3. Pán režisér Alík potreboval do televíznej rozprávky štyri psy. Dostal ponuku z Grécka, Belgicka, Írska a z Dolnej Lehoty. Vybral ovčiaka, dalmatína, vlkodava a jazvečíka, každého z inej krajiny, s rôznym menom a rôznym vekom.

- Najstarší zo psov bol jazvečík, mal 5 rokov.
- Bucki bol z nich druhý najmladší.
- Vlkodav pochádzal z Írska.
- Pes z Dolnej Lehoty sa volal Dunčo.
- Oddi oslávil včera svoje štvrté narodeniny.
- Ovčiak pochádzal z Belgicka.
- Rubby nebol dalmatín.
- Vlkodav mal tri roky.
- Najmladší z vybraných psov bol Rubby, mal dva roky.

Zistite, ako sa každý zo štyroch psov volal, odkiaľ pochádzal, akej bol rasy a koľko mal rokov. (Libuše Hozová)

Nápad. Zoradte si psy podľa ich veku.

Riešenie. Pri každom psovi sledujeme štyri znaky, pri každom znaku rozlišujeme štyri možnosti. Podľa informácií zo zadania môžeme začať priraďovať možnosti napr. podľa veku:

vek	2 roky	3 roky	4 roky	5 rokov
rasa		vlkodav		jazvečík
meno	Rubby	Bucki	Oddi	
krajina				

Týmto sa nepriamo dozvedáme, že vlkodav sa volal Bucki. Z textu navyše vieme, že vlkodav pochádzal z Írska, identifikácia jedného z vybraných psov je teda úplná.

Pri druhom čítaní si všimame, že Rubby nebol dalmatín, teda to bol ovčiak (z predchádzajúceho vieme, že to nebol vlkodav ani jazvečík). Ďalej ovčiak pochádzal z Belgicka, teda identifikácia ďalšieho psa je úplná.

Medzi rasami, resp. menami teraz vieme doplniť poslednú chýbajúcu možnosť: Oddi – dalmatín, resp. jazvečík – Dunčo.

Posledná informácia zo zadania, ktorú sme zatiaľ nepoužili, hovorí, že Dunčo bol z Dolnej Lehoty. Dalmatín Oddi teda pochádzal z Grécka a výsledné priradenie vyzerá takto:

vek	2 roky	3 roky	4 roky	5 rokov
rasa	ovčiak	vlkodav	dalmatín	jazvečík
meno	Rubby	Bucki	Oddi	Dunčo
krajina	Belgicko	Írsko	Grécko	Dolná Lehota

4. Mamička uvarila domácu ríbezlovú šťavu a nalievala ju do fliaš. Flaše mala dvojaké: malé s objemom 500 ml a veľké s objemom 750 ml. Nakoniec jej zvýšilo 12 malých fliaš prázdnych, ostatné flaše boli úplne naplnené. Potom mamička zistila, že mohla šťavu nalievať tak, aby jej zvýšili prázdne iba veľké flaše a všetky ostatné boli úplne naplnené. Koľko prázdnych fliaš by jej v takom prípade zvýšilo? (Michaela Petrová)

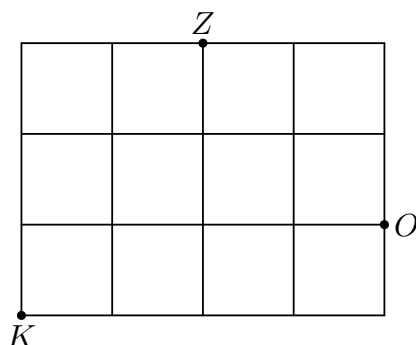
Nápad. Koľko šťavy mamičke chýbalo k naplneniu všetkých fliaš?

Riešenie. Mamičke zvýšilo nenaplnených 12 fliaš, každá s objemom 500 ml. Do nich by sa vošlo 6 000 ml šťavy ($12 \cdot 500 = 6\,000$).

Rovnaké množstvo by sa vošlo do 8 veľkých fliaš ($6\,000 : 750 = 8$). Keby mamička nalievala šťavu druhým spôsobom, zvýšilo by jej 8 prázdnych veľkých fliaš.

Poznámka. Jedna veľká fľaša má rovnaký objem ako jeden a pol malej fľaše, čiže dve veľké flaše majú rovnaký objem ako tri malé. Podľa tohto návodu možno flaše vhodne zamieňať a vyhnúť sa počítaniu s veľkými číslami: 12 malých fliaš má rovnaký objem ako 8 veľkých.

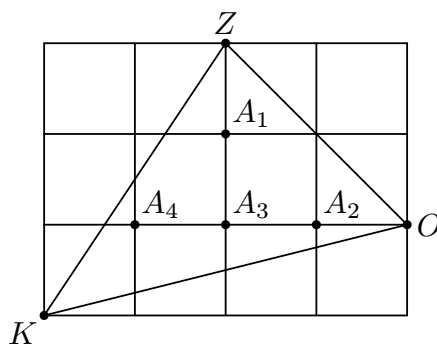
5. V štvorcovej sieti so štvorcikmi s rozmermi $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ sú vyznačené tri mrežové body K , O a Z . Určte mrežový bod A tak, aby obsah štvoruholníka $KOZA$ bol 4 cm^2 .



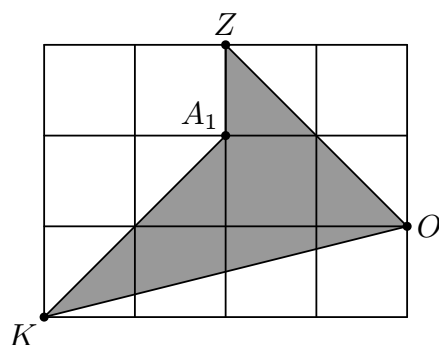
(Eva Semerádová)

Nápad. Určte najskôr obsah trojuholníka KOZ .

Riešenie. Obsah trojuholníka KOZ je rovný rozdielu obsahu okolitého obdĺžnika a troch rohových trojuholníkov, teda $12 - 2 - 2 - 3 = 5\text{ (cm}^2\text{)}$. Keďže obsah štvoruholníka $KOZA$ má byť 4 cm^2 , teda menej ako obsah trojuholníka KOZ , musí bod A ležať vnútri tohto trojuholníka. Také body sú štyri:



Obsahy prislúchajúcich štvoruholníkov sú navzájom rôzne, teda nemôže vyhovovať viac ako jeden z vyznačených bodov. Podobným výpočtom ako na začiatku zisťujeme, že obsah 4 cm^2 má štvoruholník $KOZA_1$.



Poznámka. Obsahy ostatných troch štvoruholníkov sú $1,5 \text{ cm}^2$, 3 cm^2 a $4,5 \text{ cm}^2$.

Spôsob vykrojenia štvoruholníka z daného trojuholníka je určený označením vrcholov a súvisiacimi zvyklosťami. Okrem štvoruholníka $KOZA_1$ existujú ďalšie štvoruholníky s obsahom 4 cm^2 a s vyznačenými bodmi ako vrcholmi: KOA_1Z , KOA_2Z a KA_3OZ .

6. *Myslím si päťciferné číslo tvorené párnymi ciframi. Keď prehodím cifru na treťom mieste s akoukoľvek inou, číslo sa zmenší. Ďalej prezradím, že prvá cifra je dvojnásobkom poslednej a druhá cifra je dvojnásobkom predposlednej. Aké číslo si myslím?*
(Martin Mach)

Nápad. Viete porovnať tretiu cifru s ostatnými?

Riešenie. Číslo je tvorené párnymi ciframi, t. j. ciframi 0, 2, 4, 6, 8, nie nutne všetkými.

Vlastnosť s prehadzovaním cifier znamená, že cifra na treťom mieste je menšia ako ktorákoľvek z predchádzajúcich cifier a súčasne väčšia ako ktorákoľvek z nasledujúcich.

Na prvých dvoch miestach sú párne cifry, ktoré sú dvojnásobkami iných párných cifier, t. j. niektoré z 0, 4, 8.

Medzi 0 a 0, ani medzi 4 a 2 sa nedá vložiť žiadne párne číslo, ktoré by bolo menšie ako prvé a súčasne väčšie ako druhé. Jediné mysliteľné číslo teda je 88644.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Monika Dillingerová, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020