70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

1. *Slávka si napísala farebnými fixkami štyri rôzne prirodzené čísla: červené, modré, zelené a žlté. Keď červené číslo vydelí modrým, dostane ako neúplný podiel zelené číslo a žlté predstavuje zvyšok po tomto delení. Keď vydelí modré číslo zeleným, vyjde jej delenie bezo zvyšku a podielom je číslo žlté. Slávka prezradila, že dve z jej štyroch čísel sú 97 a 101. Určte ostatné Slávkine čísla a priraďte jednotlivým číslam farby. Nájdite všetky možnosti.* (Michaela Petrová)

Nápad. Ktoré z uvedených farieb nemôžu mať čísla 97 a 101?

Riešenie. Čísla si označíme počiatočnými písmenami podľa ich farby, teda $č$, m, z, $ž$. Informácie o delení potom môžeme zapísať takto:

$$č = m \cdot z + ž, \quad m = z \cdot ž.$$

Keďže čísla majú byť navzájom rôzne, z druhej rovnosti vyplýva, že z ani $ž$ nie je 1. To znamená, že m je číslo zložené. Dosadením druhej rovnosti do prvej dostávame

$$č = z^2 \cdot ž + ž = (z^2 + 1) \cdot ž.$$

Z predchádzajúceho vieme, že ako $z^2 + 1$, tak $ž$ nie sú 1, teda aj $č$ je číslo zložené. Vzhľadom na to, že obe čísla 97 a 101 sú prvočísla, nemôže byť žiadne z nich ani modré, ani červené.

Jedno z čísel 97 a 101 je preto žlté a jedno zelené. Zvyšné čísla dopočítame z úvodných vzťahov:

$ž$	z	m	$č$
97	101	9 797	989 594
101	97	9 797	950 410

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj postupným skúšaním možností: dvojice známych čísel sa dosadia do úvodných rovností a overí sa existencia zvyšnej dvojice čísel. Napr. dosadenie $č = 101$ a $m = 97$ určuje z prvej rovnosti $z = 1$ a $ž = 4$, čo však nevyhovuje rovnosti druhej. Týmto spôsobom by sa muselo prebrať 12 možností.

Akýkoľvek dodatočný postreh môže znížiť počet možností na overovanie. Napr. (popri podmienkach uvedených v predchádzajúcom riešení) platí, že $č$ je väčšie ako ktorékoľvek zo zvyšných čísel a m je väčšie ako z a $ž$. Preto nemôže byť $č = 97$ a touto možnosťou sa nie je nutné zaoberať.

2. *Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel x a jednociferných prirodzených čísel y, pre ktoré platí*

$$\frac{x}{y} + 1 = x,\overline{y}.$$

Zápis na pravej strane rovnosti označuje periodické číslo. (*Karel Pazourek*)

Nápad. Existuje nejaká súvislosť medzi desatinnými rozvojmi čísel $\frac{x}{y} + 1$ a $\frac{1}{y}$?

Riešenie. Aby $\frac{x}{y} + 1$ bolo periodické číslo s jednocifernou periódou, musí byť aj $\frac{x}{y}$ periodické číslo s jednocifernou periódou. Keďže $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, musí tá istá podmienka platiť aj pre číslo $\frac{1}{y}$. Medzi prirodzenými číslami 1 až 9 je táto podmienka splnená iba v troch prípadoch, ktoré postupne rozoberieme:

- Pre $y = 3$ je $\frac{1}{y} = 0,\overline{3}$. Teda diskutovaná rovnosť je tvaru

  $$\frac{x}{3} + 1 = x + \frac{1}{3},$$

  čo po úprave dáva $x = 1$.
- Pre $y = 6$ je $\frac{1}{y} = 0,1\overline{6}$. Teda $0,\overline{6} = 10 \cdot \frac{1}{6} - 1 = \frac{2}{3}$ a diskutovaná rovnosť je tvaru

  $$\frac{x}{6} + 1 = x + \frac{2}{3},$$

  čo po úprave dáva $x = \frac{2}{5}$. To ale nie je celé číslo.
- Pre $y = 9$ je $\frac{1}{y} = 0,\overline{1}$. Teda $0,\overline{9} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$ a diskutovaná rovnosť je tvaru

  $$\frac{x}{9} + 1 = x + 1,$$

  čo po úprave dáva $x = 0$.

  Úloha má dve riešenia: $x = 1$, $y = 3$ a $x = 0$, $y = 9$.

Poznámky. Keďže $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$, je $\frac{y}{9} = 0,\overline{y}$ a diskutovanú rovnosť možno vyjadriť ako

$$\frac{x}{y} + 1 = x + \frac{y}{9}.$$

Pre každé jednociferné prirodzené číslo y stačí doriešiť príslušnú lineárnu rovnicu a overiť nezápornosť a celočíselnosť x. Takto dostaneme dve riešenia uvedené vyššie.

Predchádzajúcu rovnosť je možné ďalej upravovať, napr. takto:

$$\begin{aligned} 9x + 9y &= 9xy + y^2 \\ 9(x + y - xy) &= y^2. \end{aligned}$$

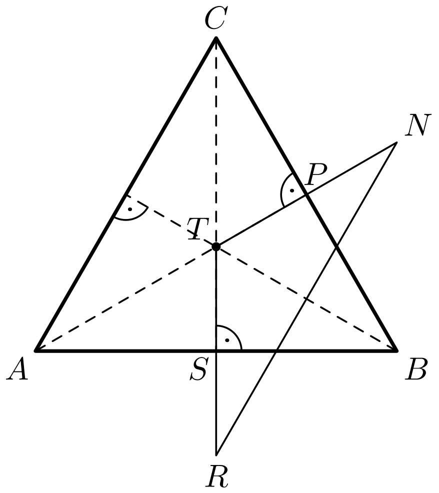
Pre ľubovoľné celé čísla x a y je výraz na pravej strane deliteľný 9. Teda aj číslo y^2 musí byť deliteľné 9, takže číslo y musí byť deliteľné 3. Medzi číslami 1 až 9 stačí overovať iba $y = 3$, 6 a 9. Takto sme dospeli k tomu istému obmedzeniu možností ako v postupe uvedenom vyššie.

3. *V rovnostrannom trojuholníku ABC je bod T jeho ťažiskom, bod R je obrazom bodu T v osovej súmernosti podľa priamky AB a bod N je obrazom bodu T v osovej súmernosti podľa priamky BC. Určte pomer obsahov trojuholníkov ABC a TRN.*

(*Eva Semerádová*)

Nápad. Čo viete o ťažisku rovnostranného trojuholníka?

Riešenie. V rovnostrannom trojuholníku je ťažisko priesečníkom výšok. Obrazy ťažiska v osových súmernostiach podľa strán trojuholníka preto ležia na prislúchajúcich (predĺžených) ťažniciach, čiže výškach. Preto trojice bodov C, T, R, resp. A, T, N ležia na priamkach. Priesečníky týchto priamok so stranami trojuholníka označíme S, resp. P.



Ťažisko delí ťažnicu v pomere 2 : 1, teda

$$|CT| = 2|TS|, \quad \text{resp.} \quad |AT| = 2|TP|.$$

V osovej súmernosti sú vzdialenosti vzoru a obrazu od osi rovnaké, teda

$$|TR| = 2|TS|, \quad \text{resp.} \quad |TN| = 2|TP|.$$

Celkom z toho odvodzujeme, že dvojice úsečiek CT a TR, resp. AT a TN sú zhodné. Navyše (vrcholové) uhly ATC a NTR sú zhodné, teda trojuholníky TCA a TRN sú zhodné (podľa vety *sus*), preto majú rovnaký obsah.

Pomer obsahov trojuholníkov ABC a TRN je rovnaký ako pomer obsahov trojuholníkov ABC a ACT. Trojuholníky ABC a ACT majú spoločnú stranu AC a zodpovedajúce výšky v pomere 3 : 1; v tom istom pomere sú aj ich obsahy. Pomer obsahov trojuholníkov ABC a TRN je 3 : 1.

Poznámka. Predchádzajúce riešenie bolo založené na znalosti polohy ťažiska na ťažnici. Aj bez tohto poznatku možno úlohu doriešiť s použitím ďalších vlastností vyplývajúcich zo zadania, napr.:

- Trojuholník ABC je tvorený tromi navzájom zhodnými trojuholníkmi ABT, BCT a ACT, príp. šiestimi trojuholníkmi, z ktorých každý je zhodný s trojuholníkom TSB.

- Trojuholníky TRB a TNB sú rovnostranné, navzájom zhodné.
- Štvoruholník $TRBN$ je kosoštvorec, ktorý je uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky, z ktorých každý je zhodný s trojuholníkom TSB.

  Odtiaľ pomer obsahov trojuholníkov ABC a TRN je $6 : 2 = 3 : 1$.

---

4. *Na stene bolo napísané dvakrát to isté päťciferné číslo. Pat pred jeden zápis čísla pripísal jednotku, Mat pripísal jednotku za ten druhý zápis čísla. Tým dostali dve šesťciferné čísla, z ktorých jedno bolo trikrát väčšie ako druhé. Ktoré päťciferné číslo bolo pôvodne napísané na stene?* (Libuše Hozová)

Nápad. Ktoré z novovzniknutých čísel bolo väčšie?

Riešenie. Obe nové čísla mali rovnaký počet cifier a väčšie bolo trikrát väčšie ako to druhé. Väčšie číslo teda nemohlo začínať jednotkou – bolo to číslo Matovo.

Pôvodne napísané päťciferné číslo označíme x. Patova úprava dáva číslo $100\,000 + x$, Matova úprava dáva číslo $10x + 1$ a platí

$$\begin{aligned} 10x + 1 &= 3(100\,000 + x), \\ 7x &= 299\,999, \\ x &= 42\,857. \end{aligned}$$

Na stene bolo pôvodne napísané dvakrát číslo $42\,857$.

Poznámky. Ak by sme predpokladali, že Patovo nové číslo bolo väčšie ako Matovo, tak by sme dostali

$$\begin{aligned} 100\,000 + x &= 3(10x + 1), \\ 99\,997 &= 29x. \end{aligned}$$

To však nevedie k celočíselnému riešeniu (zvyšok po delení $99\,997 : 29$ je 5).

Úlohu je možné riešiť ako algebrogram. Obe uvedené možnosti zodpovedajú postupne nasledujúcim zadaniam:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & a & b & c & d & e \\ \times & & & & & 3 \\ \hline a & b & c & d & e & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & 1 \\ \times & & & & & 3 \\ \hline 1 & a & b & c & d & e \end{array}$$

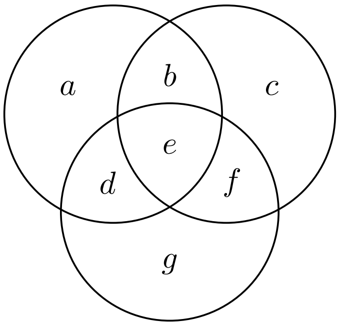
V prvom prípade postupne nepriamo dopĺňame $e = 7$, $d = 5$, $c = 8$, $b = 2$, $a = 4$, čo zodpovedá riešeniu uvedenému vyššie. V druhom prípade postupne priamo dopĺňame $e = 3$, $d = 9$, $c = 7$, $b = 3$, $a = 1$, čo však vedie ku sporu: prvá cifra vo výsledku vychádza 4 a nie predpísaná 1.

---

5. *Na ihrisku sú nakreslené tri rovnako veľké kruhy. Rozostavte 16 kolkov tak, aby v každom kruhu stálo 9 kolkov. Nájdite aspoň osem podstatne odlišných rozostavení, t. j. takých rozostavení, pri ktorých sa nerozlišujú kolky ani kruhy.* (Libuše Hozová)

Nápad. Môžu niektoré kolky byť súčasne vo všetkých troch kruhoch? Ak áno, koľko najviac?

Riešenie. Kolky v kruhoch predstavujú prvky v množinách: hľadáme tri množiny po 9 prvkoch, ktorých zjednotenie má 16 prvkov. Vzťahy medzi množinami znázorníme nasledovne (písmená a až g označujú počty prvkov v prislúchajúcich podmnožinách):



Stačí sa sústrediť iba na b, d, e, f, lebo zvyšné tri neznáme sú týmito štyrmi úplne určené:

$$a = 9 - b - e - d, \quad c = 9 - b - e - f, \quad g = 9 - d - e - f. \tag{1}$$

Pomocou týchto vzťahov tiež dostávame obmedzenie

$$a + b + c + d + e + f + g = 27 - b - d - f - 2e = 16,$$

teda

$$b + d + f + 2e = 11. \tag{2}$$

Diskusiu môžeme viesť vzhľadom na spoločný prienik všetkých troch množín; z obmedzenia (2) vyplýva, že e nemôže byť väčšie ako 5. Postupne rozoberieme všetky možné hodnoty e a pre každú z nich nájdeme nezáporné celé čísla b, d, f, ktoré vyhovujú obmedzeniu (2) a pre ktoré čísla v (1) sú tiež nezáporné. Trojice b, d, f nás zaujímajú až na poradie, takže si ich pre poriadok vhodne usporiadame (zámena poradia vedie k riešeniu, ktoré nie je podstatne odlišné od pôvodného):

Pre $e = 5$ dostávame $b + d + f = 1$, teda

b	d	f	a	c	g
1	0	0	3	3	4

Pre $e = 4$ dostávame $b + d + f = 3$, teda

b	d	f	a	c	g
3	0	0	2	2	5
2	1	0	2	3	4
1	1	1	3	3	3

Pre $e = 3$ dostávame $b + d + f = 5$, teda

b	d	f	a	c	g
5	0	0	1	1	6
4	1	0	1	2	5
3	2	0	1	3	4
3	1	1	2	2	4
2	2	1	2	3	3

Pre $e = 2$ dostávame $b + d + f = 7$, teda

b	d	f	a	c	g
7	0	0	0	0	7
6	1	0	0	1	6
5	2	0	0	2	5
5	1	1	1	1	5
4	3	0	0	3	4
4	2	1	1	2	4
3	3	1	1	3	3
3	2	2	2	2	3

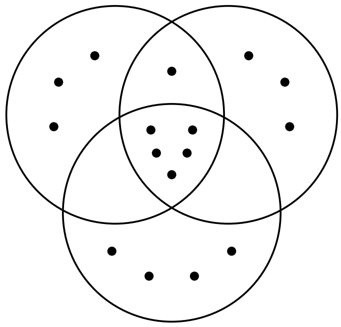
Pre $e = 1$ dostávame $b + d + f = 9$, teda

b	d	f	a	c	g
7	1	1	0	0	6
6	2	1	0	1	5
5	3	1	0	2	4
5	2	2	1	1	4
4	4	1	0	3	3
4	3	2	1	2	3
3	3	3	2	2	2

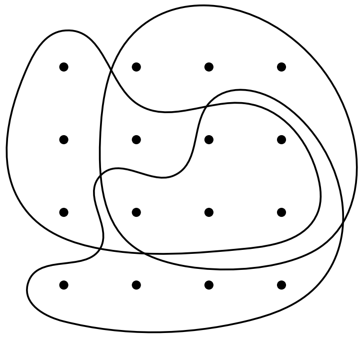
Pre $e = 0$ dostávame $b + d + f = 11$, teda

b	d	f	a	c	g
7	2	2	0	0	5
6	3	2	0	1	4
5	4	2	0	2	3
5	3	3	1	1	3
4	4	3	1	2	2

Prípadné znázornenie jednotlivých riešení je očividné. Pre ilustráciu uvádzame rozmiestnenie zodpovedajúce jedinému riešeniu v prípade $e = 5$:



Poznámky. Osem podstatne odlišných riešení možno tiež nájsť prostým (trpezlivým) skúšaním. V tomto duchu môže byť prehľadnejšie v danej šesnásťprvkovej množine vyberať tri deväťprvkové podmnožiny tak, aby žiadny prvok nezostal na ocot. Napr. vyššie znázornené riešenie zodpovedá nasledujúcemu výberu:



Všeobecný vzťah medzi počtami prvkov množín, ich prienikmi a zjednotením popisuje tzv. *princíp inklúzie a exklúzie*, pozri poznámky za riešením úlohy **Z8–I–5**.

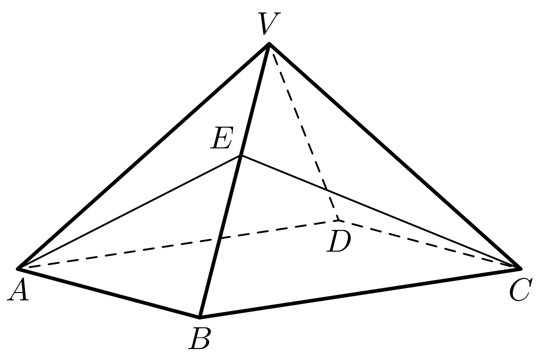
---

6. *Jozef a Mária objavili na dovolenke pravidelný ihlan, ktorého podstavou bol štvorec so stranou 230 m a ktorého výška bola rovná polomeru kruhu s rovnakým obvodom ako má podstavný štvorec. Mária označila vrcholy štvorca $ABCD$. Jozef vyznačil na priamke spájajúcej bod B s vrcholom ihlana taký bod E, že dĺžka lomenej čiary AEC bola najkratšia možná. Určte dĺžku lomenej čiary AEC zaokrúhlenú na celé centimetre.*

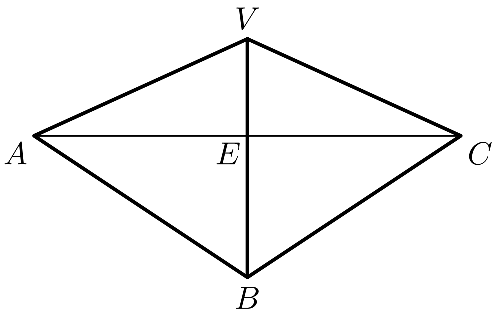
(Marie Krejčová, František Steinhauser)

Nápad. V akom vzťahu boli úsečky AE a CE vzhľadom na priamku spájajúcu bod B s vrcholom ihlana?

Riešenie. Pre lepšiu prehľadnosť si situáciu zo zadania znázorníme:

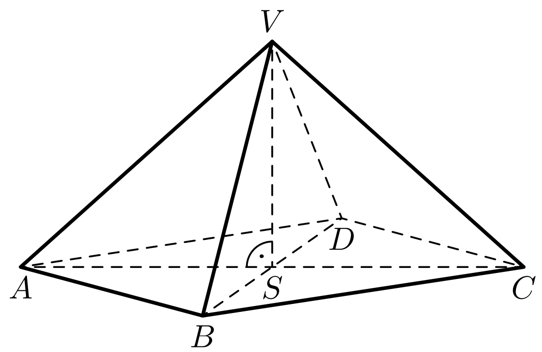


Lomená čiara AEC je najkratšia, keď sa po rozvinutí plášťa ihlana do roviny javí ako úsečka:



Úsečky AV a CV sú zhodné a rovnako tak úsečky AB a CB. Teda po rozvinutí plášťa do roviny sú body A a C súmerné podľa priamky BV, preto úsečka AC je na túto priamku kolmá. Dĺžka najkratšej možnej lomenej čiary AEC je rovná dvojnásobku veľkosti výšky trojuholníka ABV z vrcholu A, a tak ju aj určíme.

Trojuholník ABV je rovnoramenný, veľkosť jeho základne poznáme, ramená sú preponami pravouhlých trojuholníkov, ktorých jedna odvesna je polovicou uhlopriečky podstavového štvorca a druhá odvesna je výškou ihlana:



Polovica uhlopriečky podstavového štvorca má (podľa Pytagorovej vety) veľkosť

$$|AS| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|AB| \doteq 162{,}635\,\mathrm{m}.$$

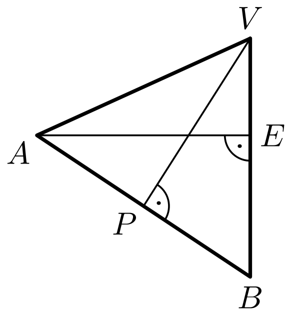
Výška ihlana má (podľa informácie zo zadania o obvodoch) veľkosť

$$|SV| = \frac{4}{2\pi}\,|AB| \doteq 146{,}423\,\mathrm{m}.$$

Hrany prechádzajúce vrcholom ihlana majú (podľa Pytagorovej vety) veľkosť

$$|AV| = \sqrt{|AS|^2 + |SV|^2} \doteq 218{,}837\,\mathrm{m}.$$

Teraz poznáme všetky strany trojuholníka ABV. Jeho výšku z vrcholu A môžeme vyjadriť pomocou výšky z hlavného vrcholu V a dvojakého vyjadrenia obsahu tohto trojuholníka:



Trojuholník ABV je súmerný podľa výšky idúcej hlavným vrcholom. Táto výška má (podľa Pytagorovej vety) veľkosť

$$|VP| = \sqrt{|AV|^2 - \frac{1}{4}|AB|^2} \doteq 186{,}184\,\mathrm{m}.$$

Obsah trojuholníka ABV je rovný $\frac{1}{2}|AB| \cdot |VP| = \frac{1}{2}|BV| \cdot |AE| = \frac{1}{2}|AV| \cdot |AE|$, teda výška z vrcholu A má veľkosť

$$|AE| = \frac{|AB| \cdot |VP|}{|AV|} \doteq 195{,}681\,\mathrm{m}.$$

Dĺžka najkratšej možnej lomenej čiary AEC je

$$|AEC| = 2|AE| \doteq 391{,}362\,\mathrm{m},$$

t. j. približne 391 m a 36 cm.

Poznámky. Úvodný postreh s rozvinutým plášťom ihlana možno nahradiť nasledujúcou úvahou: Trojuholníky ABV a BCV sú zhodné, teda aj úsečky AE a EC sú zhodné a dĺžka lomenej čiary AEC je rovná dvojnásobku dĺžky úsečky AE. Tá je najkratšia možná, keď je na priamku BE kolmá. Stačí teda určiť výšku trojuholníka ABV z vrcholu A.

V uvedenom riešení úlohy môže vďaka priebežnému zaokrúhľovaniu dochádzať k nežiaducemu hromadeniu chyby. Preto sme radšej zaokrúhľovali na celé mm. Všetky predchádzajúce veličiny je tiež možné vyjadriť všeobecne pomocou $|AB|$ a dosadzovať až do konečného výrazu. Takto postupne po úpravách dostávame:

$$|AV| = \sqrt{\frac{\pi^2 + 8}{2\pi^2}} \cdot |AB|, \quad |VP| = \sqrt{\frac{\pi^2 + 16}{4\pi^2}} \cdot |AB|, \quad |AE| = \sqrt{\frac{\pi^2 + 16}{2\pi^2 + 16}} \cdot |AB|.$$

Bežne používaná približná hodnota $\pi \doteq \frac{22}{7}$ vedie vo výsledku k chybe medzi 2 a 3 cm. Porovnaním celkových rozmerov a proporcií ihlana to vyzerá, že Jozef a Mária boli na dovolenke v Egypte pri Cheopsovej (resp. Chufuovej či Veľkej) pyramíde.

K vyjadreniu výšky trojuholníka možno tiež dospieť so znalosťami goniometrických funkcií, ich základného vzťahu $((\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1)$ a kosínusovej vety $(|AV|^2 = |AB|^2 + |BV|^2 - 2|AV| \cdot |BV| \cdot \cos\beta)$. Tieto znalosti v danej kategórii nemôžeme predpokladať, avšak zvedaví riešitelia sa s nimi môžu zoznámiť, príp. porovnať tento prístup s ostatnými.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Monika Dillingerová, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020