70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení okresných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 17. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. *Babička mala štvorcovú záhradu. Dokúpila niekoľko susedných pozemkov, čím získala zasa štvorcový pozemok, ktorého strana bola o tri metre dlhšia ako strana pôvodnej záhrady. Takto bola výmera pozemku o deväť štvorcových metrov väčšia ako dvojnásobok pôvodnej výmery. Aká dlhá bola strana pôvodnej záhrady?* (Katarína Buzáková)

Riešenie. Označme a dĺžku strany pôvodnej štvorcovej záhrady. Po dokupovaní vznikol nový štvorcový pozemok, ktorého strana mala dĺžku $a+3$. Pre výmery pozemkov podľa zadania platí

$$(a+3)^2 = 2a^2 + 9.$$

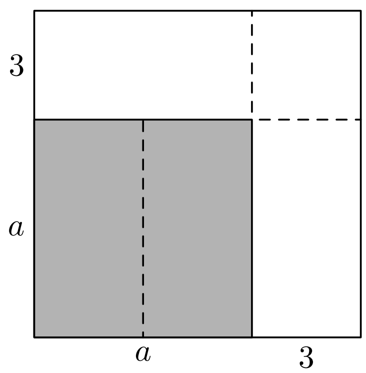
Ekvivalentnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} a^2 + 6a + 9 &= 2a^2 + 9, \\ 6a &= a^2, \\ 0 &= a(a-6). \end{aligned}$$

Uvedená rovnica má dve riešenia: $a = 0$ a $a = 6$.

Pôvodná záhrada mala nenulové rozmery, teda jej strana bola dlhá šesť metrov.

Poznámka. Síce nevieme, ako vyzerali dokúpené pozemky, ale výmery záhrad (a ich pomocné delenia) môžeme znázorniť nasledovne:



Veľký štvorec je zložený z dvoch štvorcov a dvoch zhodných obdĺžnikov, resp. z jedného štvorca a štyroch zhodných obdĺžnikov. Takto názorne vyjavujeme výsledok $a = 3 + 3 = 6$.

Návrh hodnotenia. 2 body za formuláciu podmienok zo zadania pomocou jednej neznámej; 2 body za ekvivalentné úpravy; 2 body za vylúčenie nulového riešenia a záver.

Riešenia založené na grafickom znázornení hodnoťte podľa kvality sprievodného komentára.

---

2. *Babička ešte nemá 100 rokov, vnučka má viac ako 10 rokov a vek babičky je násobkom veku vnučky. Keď vnučka napísala vek babičky a zaň vek svoj, dostala štvorciferné číslo. Keď babička napísala vek vnučky a zaň vek svoj, dostala iné štvorciferné číslo. Rozdiel týchto dvoch štvorciferných čísel je 7128. Koľko rokov môže mať babička a koľko vnučka? Uveďte všetky možnosti.* (*Libuše Hozová*)

Riešenie. Označme v vek vnučky a b vek babičky. Vek babičky je násobkom veku vnučky, teda $b = kv$ pre nejaké prirodzené k.

Štvorciferné číslo zapísané vnučkou bolo $100b + v$, štvorciferné číslo napísané babičkou bolo $100v + b$, teda

$$(100b + v) - (100v + b) = 7128.$$

Po úpravách (a dosadení $b = kv$) dostávame

$$99(kv - v) = 7128,$$
$$v(k - 1) = 72.$$

Úlohou je nájsť v a k tak, aby platila predchádzajúca rovnosť a navyše $v > 10$ a $b = kv < 100$.

Číslo 72 možno (až na poradie činiteľov) vyjadriť nasledujúcimi šiestimi spôsobmi:

$$72 = 72 \cdot 1 = 36 \cdot 2 = 24 \cdot 3 = 18 \cdot 4 = 12 \cdot 6 = 9 \cdot 8.$$

Postupne rozoberieme všetky možnosti vyhovujúce $v > 10$ a určíme zodpovedajúce k a $b = kv$:

v	72	36	**24**	**18**	**12**
k	2	3	4	5	7
b	144	108	**96**	**90**	**84**

Silno sú vyznačené vyhovujúce výsledky, t. j. tie, pre ktoré platí $b < 100$. Úloha má tri riešenia.

Iné riešenie. Označme v vek vnučky a b vek babičky, ďalej $v = \overline{AB}$ a $b = \overline{CD}$ dekadické zápisy týchto čísel. Informáciu o rozdiele štvorciferných čísel zo zadania vyjadríme pomocou algebrogramu:

$$\begin{array}{r} C\,D\,A\,B \\ -\,A\,B\,C\,D \\ \hline 7\;1\;2\;8 \end{array}$$

Keďže vnučka je mladšia ako babička, dochádza na posledných dvoch miestach k „prechodu cez desiatku“:

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B \\ -\quad C\,D \\ \hline 2\,8 \end{array}$$

Teda babička je o 72 rokov staršia ako vnučka.

Keďže vnučka má aspoň 11 rokov, má babička aspoň 83 rokov. Keďže babička má nanajvýš 99 rokov, má vnučka nanajvýš 27 rokov. V týchto medziach stačí prebrať všetky dvojice v a $b = v + 72$ a overiť, či b je násobkom v:

v	11	**12**	13	14	15	16	17	**18**	19
b	83	**84**	85	86	87	88	89	**90**	91

v	20	21	22	23	**24**	25	26	27
b	92	93	94	95	**96**	97	98	99

Vyhovujúce výsledky sú vyznačené silno; úloha má tri riešenia.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za každé vyhovujúce riešenie; 3 body za úplnosť a kvalitu komentára.

---

3. *Karol, Miro a Ľudo porovnávali svoje zbierky známok. Keď kontrolovali počty, zistili, že Karol a Miro majú dokopy 101 známok, Karol a Ľudo 115 známok, Miro a Ľudo 110. Keď overovali, čo by mohli meniť, zistili, že žiadnu známku nemajú všetci rovnakú, ale že Karol a Miro majú 5 známok rovnakých, Karol a Ľudo 12 rovnakých, Miro a Ľudo 7. Koľko známok má Ľudo iných ako ostatní chlapci?* (Miroslava Farkas Smitková)

Riešenie. Označme postupne K, L a M počty známok, ktoré vlastní Karol, Miro a Ľudo. Podľa zadania platí

$$K + M = 101, \quad K + L = 115, \quad M + L = 110.$$

Súčtom týchto troch rovností a ďalšími úpravami postupne dostávame:

$$\begin{aligned} 2K + 2M + 2L &= 326, \\ K + M + L &= 163, \\ L &= 163 - (K + M). \end{aligned}$$

Dosadením prvej z úvodnej trojice rovníc zisťujeme, že Ľudo má celkom 62 známok ($L = 163 - 101 = 62$).

Z týchto 62 známok má 12 rovnakých ako Karol a 7 rovnakých ako Miro. Ľudo teda má 43 známok iných ako ostatní chlapci ($62 - 12 - 7 = 43$).

Iné riešenie. Označme postupne k, l a m počty známok, ktoré vlastní iba Karol, iba Miro a iba Ľudo. Podľa zadania platí

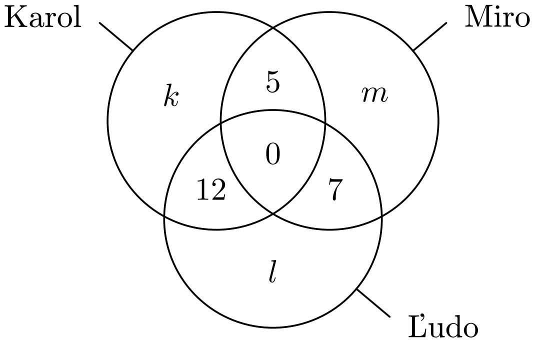
$$\begin{aligned} (k + 5 + 12) + (m + 5 + 7) &= 101, \\ (k + 5 + 12) + (l + 7 + 12) &= 115, \\ (m + 5 + 7) + (l + 7 + 12) &= 110. \end{aligned}$$

Úpravami jednotlivých riadkov dostávame ekvivalentnú sústavu

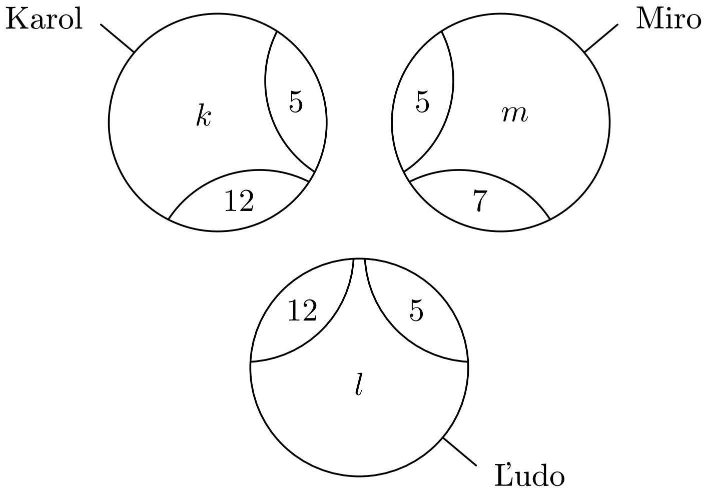
$$
\begin{aligned}
k+m&=72,\\
k+l&=79,\\
m+l&=79.
\end{aligned}
$$

Z posledných dvoch rovníc vyplýva, že $k=m$, z prvej potom $k=m=36$. Z toho ďalej dopočítame $l=43$. Ľudo má 43 známok iných ako ostatní chlapci.

Poznámka. Informácie o počtoch známok možno znázorniť pomocou Vennovho diagramu takto:



Pri vyjadrovaní súčtov známok sa hodnoty z prislúchajúcich prienikov počítajú dvakrát. Prehľadnejšie možno tento poznatok znázorniť nasledovne:

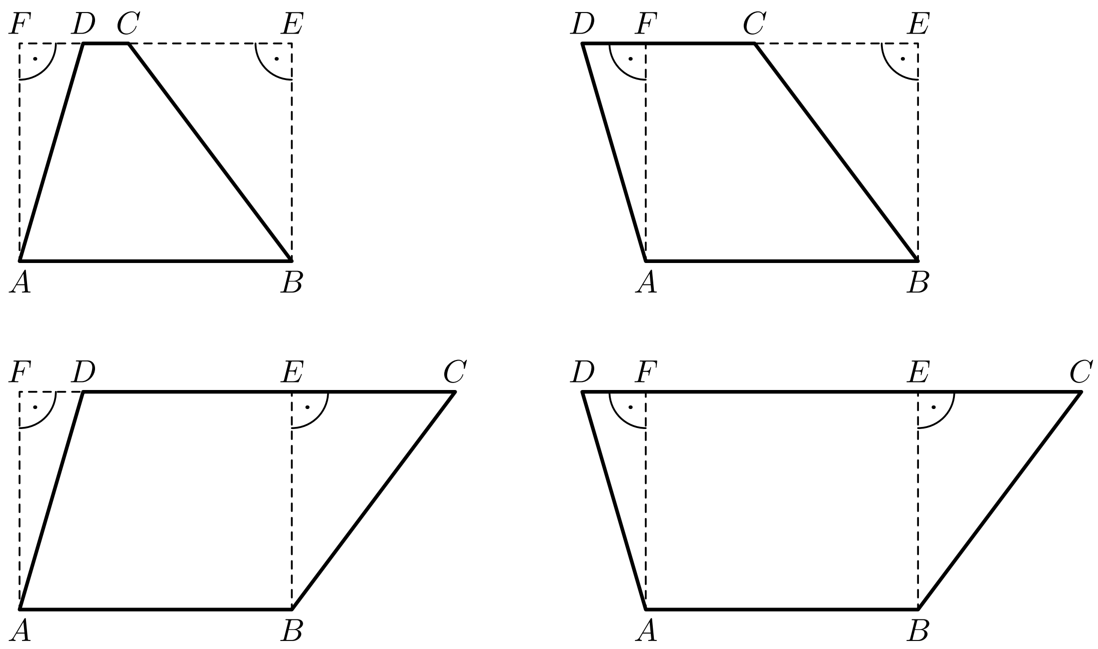


Návrh hodnotenia. 3 body za vyjadrenie informácií zo zadania pomocou rovníc a ich úpravy; 3 body za doriešenie sústavy a záver.

---

4. *Pán učiteľ chcel po Adamovi a Eve, aby vypočítali obvod lichobežníka, ktorého dlhšia základňa merala 30 cm, výška 24 cm a ramená 25 cm a 30 cm. Adamovi vyšiel iný obvod ako Eve, aj tak však pán učiteľ oboch pochválil za správne riešenia. Určte výsledky Adama a Evy.* (*Libuše Hozová*)

Riešenie. Lichobežník s danými veľkosťami základne (AB), výšky (AF) a ramien (AD a BC) nie je určený jednoznačne; môžu nastať nasledujúce možnosti:



Všetky tieto lichobežníky chápeme tak, že vznikli z obdĺžnika $ABEF$ prikladaním, príp. odoberaním pravouhlých trojuholníkov AFD a BEC. V závislosti od veľkostí daných úsečiek sa vo všeobecnosti môže stať, že štvoruholník $ABCD$ je nekonvexný.[†] To uvidíme, akonáhle dopočítame neznáme veľkosti úsečiek.

V nasledujúcich výpočtoch nepíšeme jednotky (všade cm) a dosadzujeme hodnoty zo zadania: $|AB| = 30$, $|AF| = 24$, $|AD| = 25$ a $|BC| = 30$. Podľa Pytagorovej vety v trojuholníkoch AFD a BEC dopočítame veľkosti zvyšných odvesien:

$$|FD| = \sqrt{|AD|^2 - |AF|^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7,$$
$$|EC| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18.$$

V prvom, resp. v druhom prípade vychádza

$$|CD| = |AB| - |FD| - |EC| = 30 - 7 - 18 = 5,$$
$$|CD| = |AB| + |FD| - |EC| = 30 + 7 - 18 = 19.$$

V oboch prípadoch je výsledný rozdiel kladný a menší ako 30, teda sa jedná o lichobežník, ktorého dlhšia základňa je AB. Vo zvyšných dvoch prípadoch vychádza ako dlhšia základňa CD, takže sa týmito prípadmi nemusíme zaoberať.

V prvom, resp. v druhom prípade obvod lichobežníka $|AB| + |BC| + |CD| + |DA|$ vychádza

$$30 + 30 + 5 + 25 = 90, \quad \text{resp.} \quad 30 + 30 + 19 + 25 = 104,$$

a to sú výsledky Adama a Evy.

Poznámka. Pri ručnom počítaní veľkostí odvesien FD a EC možno s výhodou využiť nasledujúce úpravy:

$$\sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{(25 - 24)(25 + 24)} = \sqrt{49} = 7,$$
$$\sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{(30 - 24)(30 + 24)} = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{18 \cdot 18} = 18.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za rozbor možností; 2 body za pomocné výpočty; 2 body podľa kvality komentára.

[†] Napr. v prvom prípade by táto situácia nastala, ak by $|AB| < |FD| + |EC|$.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Tomáš Sásik, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Erika Novotná
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021