**2009/2010**
**59. ročník Matematickej olympiády** *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 9. – 15. 9. 2010.*)

**Súťaž jednotlivcov:**

**I1.** Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

(*Česká rep., Pavel Calábek*)

**I2.** Na tabuli sú napísané všetky kladné delitele celého kladného čísla $N$. Dvaja hráči $A$ a $B$ hrajú nasledovnú hru, pričom sa pravidelne striedajú v ťahoch: V prvom ťahu hráč $A$ zmaže číslo $N$. Ak posledné zmazané číslo je $d$, potom hráč, ktorý je na ťahu, zmaže deliteľa čísla $d$ alebo násobok čísla $d$. Hráč, ktorý nemôže urobiť ťah, prehráva. Určte všetky čísla $N$, pre ktoré hráč $A$ môže vyhrať bez ohľadu na ťahy hráča $B$.

(*Poľsko*)

**I3.** Je daný tetivový štvoruholník $ABCD$ a na jeho uhlopriečke $AC$ bod $E$ taký, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nech $M$ je stred kružnice $k$ opísanej trojuholníku $BDE$. Kružnica $k$ pretína priamku $AC$ v bodoch $E$ a $F$. Dokážte, že priamky $FM$, $AD$ a $BC$ sa pretínajú v jednom bode. (*Švajčiarsko*)

**I4.** Nájdite všetky kladné celé čísla $n$, ktoré vyhovujú obom nasledujúcim podmienkam:
(i) číslo $n$ má aspoň štyri kladné delitele;
(ii) ak $a$ a $b$ sú delitele čísla $n$, pre ktoré platí $1 < a < b < n$, potom číslo $b - a$ tiež delí $n$.

(*Slovinsko*)

**Súťaž družstiev:**

**T1.** Sú dané tri rastúce postupnosti

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots, \qquad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots, \qquad c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots$$

celých kladných čísel. Každé celé kladné číslo je členom práve jednej z týchto postupností. Pre každé celé kladné číslo $n$ sú splnené podmienky:
(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;
(ii) $a_{n+1} > b_n$;
(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je párne.
Nájdite $a_{2010}$, $b_{2010}$ a $c_{2010}$. (*Litva*)

**T2.** Pre každé celé číslo $n \geqq 2$ určte najväčšie možné reálne číslo $C_n$ také, že pre všetky kladné reálne čísla $a_1, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geqq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

(*Švajčiarsko*)

**T3.** V každom vrchole pravidelného $n$-uholníka je veža. V tom istom okamihu každá veža vystrelí na jednu z dvoch susedných veží a zasiahne ju. *Výsledkom streľby* nazveme množinu všetkých zasiahnutých veží, pričom nerozlišujeme, či bola veža zasiahnutá raz alebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všetkých možných výsledkov streľby (pre dané $n$). Dokážte, že pre každé celé $k \geqq 3$ sú čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesúdeliteľné.

(*Česká rep., Martin Panák*)

**T4.** Nech $n$ je celé kladné číslo. Štvorec $ABCD$ je rozdelený na $n^2$ jednotkových štvorcov. Každý z týchto štvorcov je ďalej rozdelený na dva trojuholníky uhlopriečkou rovnobežnou s úsečkou $BD$. Niektoré z vrcholov malých štvorcov sú zafarbené na červeno tak, že každý z $2n^2$ vytvorených trojuholníkov má aspoň jeden červený vrchol. Nájdite najmenší možný počet červených vrcholov. (*Slovinsko*)

**T5.** Kružnica vpísaná trojuholníku $ABC$ sa dotýka strán $BC$, $CA$ a $AB$ postupne v bodoch $D$, $E$ a $F$. Nech $K$ je bod súmerný s bodom $D$ podľa stredu vpísanej kružnice. Priamky $DE$ a $FK$ sa pretínajú v bode $S$. Dokážte, že priamka $AS$ je rovnobežná s $BC$.

(*Poľsko*)

**T6.** Nech $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ sú také body, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník a $ABDE$ je rovnobežník. Uhlopriečky $AC$ a $BD$ sa pretínajú v bode $S$ a polpriamky $AB$ a $DC$ v bode $F$. Dokážte, že $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle ECD|$. (*Chorvátsko*)

**T7.** Pre celé nezáporné číslo $n$ definujme $a_n$ ako číslo, ktorého dekadický zápis má tvar

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Dokážte, že $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet tretích mocnín dvoch celých kladných čísel, ale nikdy sa nedá vyjadriť ako súčet druhých mocnín dvoch celých čísel.

(*Švajčiarsko*)

**T8.** Je dané celé kladné číslo $n$, ktoré nie je mocninou čísla 2. Ukážte, že existuje celé kladné číslo $m$ s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:

(i) $m$ je súčinom dvoch po sebe idúcich celých kladných čísel;
(ii) dekadický zápis čísla $m$ pozostáva z dvoch identických blokov $n$ číslic.

(*Poľsko*)