SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

60. ročník, školský rok 2010/2011

Domáce kolo

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 60. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **29. novembra 2010** (kategória **A**) a do **10. januára 2011** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2011 v Holandsku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2011 v Poľsku) a na stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v septembri 2011 v Chorvátsku).

Termíny 60. ročníka matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	07. 12. 2010	18. 01. 2011	27. – 30. 03. 2011
Kategórie B, C	20. 01. 2011	05. 04. 2011	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2010/2011
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://matematika.okamzite.eu`
`http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Mgr. Ján Mazák, Bc. Michal Prusák

A KATEGÓRIA

A – I – 1

Egy növekvő számtani sorozat négy egymást követő eleme az

$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$

egyenlet valós gyökei. Ezek közül az egyik elem egyúttal gyöke még a

$$bx^2 + ax + a = 1$$

egyenletnek is. Határozzátok meg az a és b paraméterek összes lehetséges értékét.

(*Peter Novotný*)

A – I – 2

Legyenek k és n természetes számok. „Az $(n-1)(n+1)$ szám osztható a k-val“ állítás érvényességéből Ádám arra a következtetésre jutott, hogy vagy az $n-1$, vagy az $n+1$ osztható k-val. Határozzátok meg az összes olyan k természetes számot, amelyre Ádám következtetése helyes minden természetes n-re. (*Ján Mazák*)

A – I – 3

Adottak a k és l körvonalak amelyek az A és B pontokban metszik egymást. Jelölje rendre K és L a közös érintőjük érintési pontjait úgy, hogy B az AKL háromszög belső pontja legyen. A k és l körvonalakon vegyük fel rendre az N és M pontokat úgy, hogy az A pont az MN szakasz belső pontja legyen. Bizonyítsátok be, hogy a $KLMN$ négyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, amikor az MN egyenes érinti az AKL háromszög köré írt körét. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Legyen $6n$ darab, a színtől eltekintve teljesen egyforma zsetonunk. Mind a $2n$ színből pontosan három darab zseton van. Minden természetes $n > 1$-re találjátok meg a zsetonok összes olyan két csoportra való elosztásának p_n számát, amelyben minden csoportban pontosan $3n$ zseton van és semmelyik csoportban sem található három egyforma színű zseton. Bizonyítsátok be, hogy p_n pontosan akkor páratlan szám, amikor $n = 2^k$, ahol k megfelelő természetes szám.

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Egy kocka minden lapjára fel van írva pontosan egy egész szám. Egy lépésben kiválasztunk két szomszédos lapot és a rajtuk levő számokat eggyel növeljük. Határozzátok meg a szükséges és elégséges kezdeti feltételt a kocka lapjainak megszámozására, hogy véges sok lépés után a kocka minden lapján egyforma számot kaphassunk. (*Peter Novotný*)

A – I – 6

Bizonyítsátok be, hogy minden, a C csúcsnál hegyesszögű ABC háromszögben érvényes az

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leq 2ab$$

egyenlőtlenség. Állapítsátok meg, hogy mikor áll fenn egyenlőség. (*Jaromír Šimša*)

B KATEGÓRIA

B – I – 1

A valós számok halmazán oldjátok meg a következő egyenletrendszert:

$$\sqrt{x^2+y^2} = z+1,$$
$$\sqrt{y^2+z^2} = x+1,$$
$$\sqrt{z^2+x^2} = y+1.$$

(*Tomáš Jurík*)

B – I – 2

Jelölje P az $ABCD$ téglalap egy belső pontját, valamint rendre Q és R a P pont képét az A és C középpontú középpontos tükrözésben. Tegyük fel, hogy a QR egyenes metszi az AB és BC oldalakat az M és N belső pontokban. Szerkesszétek meg azon P pontok halmazát, amelyre $|MN| = |AB|$. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Legyenek a, b és c valós számok, melyek összege 6. Bizonyítsátok be, hogy az

$$ab+bc, \quad bc+ca, \quad ca+ab$$

számok közül legalább az egyik nem nagyobb, mint 8. (*Ján Mazák*)

B – I – 4

Találjátok meg az összes olyan n egész számot, amelyre az

$$\frac{n^3+2\,010}{n^2+2\,010}$$

tört értéke egy egész számmal egyenlő. (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

Foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogy melyek azok az ABC háromszögek, amelyekben az A és B csúcsoknál hegyes szögek vannak és a következő tulajdonsággal rendelkeznek: Ha a C-ből húzott magasságvonal középpontján keresztül húzunk három, a háromszög oldalaival párhuzamos egyenest, akkor az oldalakkal való hat metszéspontjuk egy körvonalon helyezkedik el.

a) Mutassátok meg, hogy minden olyan ABC háromszög megfelel, amelynek a C csúcsánál derékszög van.

b) Magyarázzátok meg, hogy miért nem felel meg semmilyen más ABC háromszög.

(*Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Hány olyan tízjegyű szám van, amelyekben törölni tudunk két egymás mellett álló számjegyet úgy, hogy a megmaradó szám pontosan 99-szer lesz kisebb, mint az eredeti? (*Ján Mazák*)

MATEMATIKAI OLIMPIA

60.-ik évfolyam 2010 / 2011 tanév Házi forduló

****

C KATEGÓRIA

C – I – 1

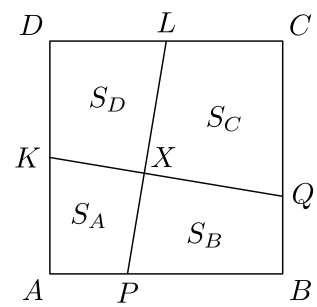
Luca egy táblára felírt két nullától különböző számot. Ezek után rendre beírta közéjük az összeadás, kivonás, szorzás és végül az osztás műveleti jelét, majd ezeket a műveleteket sorra helyesen el is végezte. Az eredmények között csupán két különböző érték fordult elő. Melyik két számot írhatta fel Luca eredetileg a táblára? (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Bizonyítsátok be, hogy a $23x+y$ és $19x+3y$ kifejezések pontosan ugyanazokra az x, y természetes számokból álló számpárokra oszthatók 50-nel. (*Jaroslav Zhouf*)

C – I – 3

Adott egy 1 cm oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet. A K és L pontok a DA és DC oldalak középpontjai. A P pont az AB oldalon fekszik úgy, hogy $|BP| = 2|AP|$. A Q pont a BC oldalon fekszik úgy, hogy $|CQ| = 2|BQ|$. A KQ és PL szakaszok az X pontban metszik egymást. Jelölje rendre S_A, S_B, S_C és S_D az $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ és $LDKX$ négyszögek területét (lásd az ábrát).



a) Bizonyítsátok be, hogy $S_B = S_D$.

b) Számoljátok ki az $S_C - S_A$ különbséget.

c) Magyarázzátok meg, miért nem érvényes az $S_A + S_C = S_B + S_D$ egyenlőség.

(*Peter Novotný*)

C – I – 4

Egy diákokból álló n-tagú csoportban van néhány kölcsönös barátság. Minden diáknak van legalább négy barátja. A tanárnő két, legfeljebb négytagú csapatra szeretné osztani a diákokat úgy, hogy minden diáknak legyen legalább egy barátja a saját csapatában.

a) Mutassátok meg, hogy $n = 7$ esetén a diákok mindig szétválaszthatók a feltételeknek megfelelően.

b) Állapítsátok meg, hogy $n = 8$ esetén is mindig szétválaszthatók-e a követelt módon.

(*Tomáš Jurík*)

C – I – 5

Bizonyítsátok be, hogy bármilyen a és b pozitív egész számra teljesül a

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab$$

egyenlőtlenség, ahol $[a, b]$ a legkisebb közös többszöröst, (a, b) pedig a legnagyobb közös osztót jelöli. Állapítsátok meg, hogy mikor áll fenn egyenlőség. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Adott az $ABCD$ trapéz. Legyen P az AB alap középpontja. Egy, az AB alappal párhuzamos egyenes rendre a K, L, M és N pontokban metszi az AD, PD, PC és BC szakaszokat.

a) Bizonyítsátok be, hogy $|KL| = |MN|$.

b) Határozzátok meg a KL egyenes azon helyzetét, amelyre érvényes, hogy $|KL| = |LM|$.

(*Jaroslav Zhouf*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

60. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh: RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák,
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Peter Novotný, PhD.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR
Miesto a dátum vydania: Bratislava, september 2010
Sadzbu programom TEX pripravil Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preložil Mgr. Štefan Gyürki, PhD.