2008/2009
58. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

---

1. *Nech n je kladné celé číslo a $a_1, \dots, a_k$ ($k \geqq 2$) sú navzájom rôzne celé čísla z množiny $\{1, \dots, n\}$ také, že n je deliteľom čísla $a_i(a_{i+1} - 1)$ pre $i = 1, \dots, k - 1$. Dokážte, že n nie je deliteľom čísla $a_k(a_1 - 1)$.* (*Austrália*)

Riešenie. (Podľa *Michala Hagaru.*) Podmienku $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ prepíšeme v tvare kongruencie a upravíme:

$$\begin{aligned} a_i(a_{i+1} - 1) &\equiv 0 \pmod{n}, \\ a_i a_{i+1} - a_i &\equiv 0 \pmod{n}, \\ a_i a_{i+1} &\equiv a_i \pmod{n}, \qquad i = 1, 2, \dots, k - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Využitím (1) postupne pre $i = 1, 2, \dots, k - 1$ dostávame

$$a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv a_1 a_2 a_3 \equiv a_1 a_2 a_3 a_4 \equiv \dots \equiv a_1 a_2 \dots a_k \pmod{n}. \tag{2}$$

Predpokladajme sporom, že $n \mid a_k(a_1 - 1)$, teda že $a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}$. Potom

$$a_1 a_2 \dots a_k = a_2 \dots a_k a_1 \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n},$$

čo v spojení s (2) dáva

$$a_1 \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n}. \tag{3}$$

Rovnako ako pri (2), využitím (1) postupne pre $i = 2, \dots, k - 1$ máme

$$a_2 \equiv a_2 a_3 \equiv a_2 a_3 a_4 \equiv \dots \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n}.$$

Spolu s (3) odtiaľ

$$a_1 \equiv a_2 \dots a_k \equiv a_2 \pmod{n},$$

teda a_1 a a_2 dávajú rovnaký zvyšok po delení n, čo je v spore s predpokladom, že sú to navzájom rôzne čísla z množiny $\{1, \dots, n\}$.

---

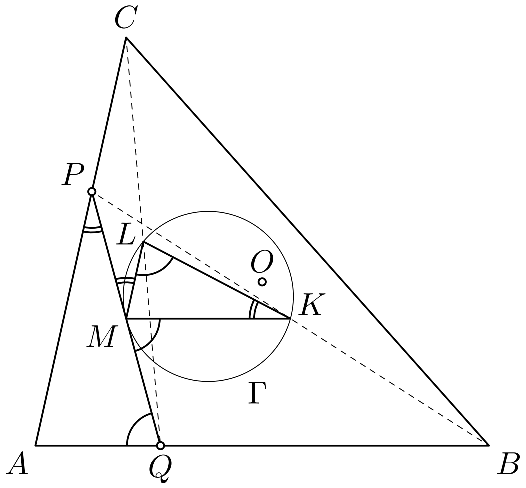
2. *Daný je trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech P resp. Q je vnútorný bod strany CA resp. AB. Označme postupne K, L, M stredy úsečiek BP, CQ, PQ a Γ kružnicu prechádzajúcu bodmi K, L, M. Predpokladajme, že priamka PQ sa dotýka kružnice Γ. Dokážte, že $|OP| = |OQ|$.* (*Rusko*)

Riešenie. (Podľa *Michala Hagaru.*) Úsečka MK je strednou priečkou trojuholníka QBP, preto

$$|KM| = \frac{1}{2}|QB| \qquad \text{a} \qquad AB \parallel MK.$$

Zo striedavých uhlov potom $|\measuredangle AQP| = |\measuredangle KMQ|$. Keďže PQ je dotyčnicou kružnice Γ, z rovnosti úsekového a obvodového uhla prislúchajúceho tetive MK máme $|\measuredangle KMQ| = |\measuredangle KLM|$. Spolu teda $|\measuredangle AQP| = |\measuredangle KLM|$. Analogicky dostaneme (obr. 1)

$$|LM| = \frac{1}{2}|PC| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle APQ| = |\measuredangle LMP| = |\measuredangle LKM|.$$



Obr. 1

Z uvedených rovností uhlov vyplýva podobnosť trojuholníkov QAP a LMK (majú rovnaké veľkosti prislúchajúcich vnútorných uhlov). Z pomerov strán postupne (po dosadení vyjadrených dĺžok $|KM|$ a $|LM|$) dostávame

$$\frac{|QA|}{|LM|} = \frac{|PA|}{|KM|},$$
$$\frac{|QA|}{\frac{1}{2}|PC|} = \frac{|PA|}{\frac{1}{2}|QB|},$$
$$|QA| \cdot |QB| = |PA| \cdot |PC|.$$

Posledná rovnosť znamená, že body Q a P majú rovnakú mocnosť ku kružnici opísanej trojuholníku ABC (zrejme oba body ležia vnútri tejto kružnice). Ak označíme r jej polomer, zhodnú mocnosť možno zapísať v tvare

$$|OQ|^2 - r^2 = |OP|^2 - r^2,$$

odkiaľ už triviálne $|OP| = |OQ|$.

---

3. *Predpokladajme, že $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je rastúca postupnosť kladných celých čísel taká, že obe jej podpostupnosti*

$$s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \ldots \qquad \text{a} \qquad s_{s_1+1},\ s_{s_2+1},\ s_{s_3+1},\ \ldots$$

sú aritmetické. Dokážte, že potom aj postupnosť $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je aritmetická. (*USA*)

Riešenie. Označme D diferenciu aritmetickej postupnosti $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$ a pre každé $n = 1, 2, \ldots$ označme $d_n = s_{n+1} - s_n$. Naším cieľom je dokázať, že hodnota d_n je pre všetky n rovnaká. Najskôr ukážeme, že množina hodnôt d_n je ohraničená. Keďže zadaná postupnosť je rastúca, pre každé n je $d_n \geqq 1$. Preto[1]

$$d_n = s_{n+1} - s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(s_{n+1}-s_n)\text{-krát}} \leqq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_{n+1}-1} = D.$$

[1] Ohraničenosť hodnôt d_n sa dá zdôvodniť aj menej formálne: Každé dva po sebe idúce členy postupnosti $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ možno zrejme vložiť medzi niektoré dva členy postupnosti $1, s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$, ktorá je od druhého člena aritmetická. Preto triviálne $s_{n+1} - s_n \leqq \max\{D, s_{s_1} - 1\}$.

Označme m najmenšiu a M najväčšiu z hodnôt d_n (z ohraničenosti vyplýva existencia minima aj maxima). Stačí dokázať, že $m = M$. Predpokladajme sporom, že $m < M$.

Nech k je ľubovoľný taký index, že $d_k = m$. Teda $s_{k+1} - s_k = m$, odkiaľ

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{k+1}} - s_{s_k} = s_{s_k+m} - s_{s_k} = \\ &= d_{s_k} + d_{s_k+1} + \cdots + d_{s_k+m-1} \leqq \underbrace{M + M + \cdots + M}_{m\text{-krát}} = mM. \end{aligned} \tag{1}$$

Podobne ak K je ľubovoľný taký index, že $d_K = M$, tak $s_{K+1} - s_K = M$, teda

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{K+1}} - s_{s_K} = s_{s_K+M} - s_{s_K} = \\ &= d_{s_K} + d_{s_K+1} + \cdots + d_{s_K+M-1} \geqq \underbrace{m + m + \cdots + m}_{M\text{-krát}} = Mm. \end{aligned} \tag{2}$$

Z (1) a (2) vyplýva, že $D = Mm$, a aby platila rovnosť, nutne $d_{s_k} = d_{s_k+1} = \ldots = d_{s_k+m-1} = M$ a $d_{s_K} = d_{s_K+1} = \ldots = d_{s_K+M-1} = m$. Špeciálne máme

$$d_{s_k} = M \qquad \text{a} \qquad d_{s_K} = m. \tag{3}$$

Z rastúcosti postupnosti $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vyplýva $s_k \geqq k$. Navyše dokonca $s_k > k$, lebo ak by sme mali $s_k = k$, tak podľa (3) by bolo $m = d_k = d_{s_k} = M$, čo je v spore s $m < M$. Rovnako možno ukázať, že $s_K > K$.

Položme $n_1 = k$. Teda $d_{n_1} = m$ a podľa (3) platí $d_{s_{n_1}} = M$. Ďalej zvoľme $n_2 = s_{n_1} > n_1$. Keďže $d_{n_2} = M$, môže n_2 vystupovať v pozícii K a teda podľa (3) máme $d_{s_{n_2}} = m$ a taktiež $s_{n_2} > n_2$. Následne preto môžeme zvoliť $n_3 = s_{n_2}$ a z (3) (keďže n_3 môže vystupovať v pozícii k) opäť $d_{s_{n_3}} = M$, atď. Predpisom $n_{i+1} = s_{n_i}$ takto skonštruujeme rastúcu postupnosť $n_1, n_2, n_3, \ldots$ takú, že

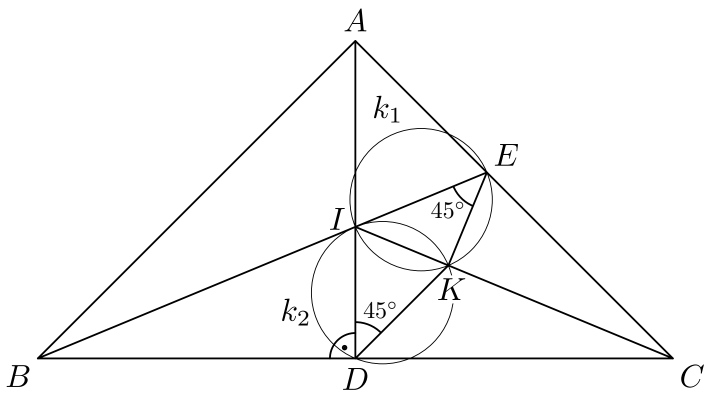
$$d_{s_{n_1}} = M, \quad d_{s_{n_2}} = m, \quad d_{s_{n_3}} = M, \quad d_{s_{n_4}} = m, \quad \ldots \tag{4}$$

Pritom postupnosť $d_{s_{n_1}}, d_{s_{n_2}}, \ldots$ je podpostupnosťou postupnosti $d_{s_1}, d_{s_2}, \ldots$ Tá má členy, ktoré sú rozdielmi členov aritmetických postupností $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$ a $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$, teda aj sama je aritmetickou postupnosťou. Keďže podľa (4) sa v nej nekonečne veľakrát opakuje hodnota m (aj M), nutne to musí byť konštantná aritmetická postupnosť a $m = M$.

---

4. *Daný je trojuholník ABC, pričom $|AB| = |AC|$. Osi uhlov CAB a ABC pretínajú strany BC a CA postupne v bodoch D a E. Nech K je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ADC. Predpokladajme, že $|\angle BEK| = 45°$. Nájdite všetky možné veľkosti uhla CAB.* (Belgicko)

Riešenie. (Podľa *Martina Bachratého*.) Označme I stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC (je to priesečník priamok AD, BE, CK). Uvažujme kružnice k_1, k_2 opísané trojuholníkom IKE, IKD (obr. 2). Obe majú nad spoločnou tetivou IK obvodový uhol veľkosti 45°, lebo K leží na osi pravého uhla ADC. Preto sú obe kružnice zhodné a teda osovo súmerné podľa priamky CI. Podľa tejto priamky sú však osovo súmerné aj priamky AC, BC. Takže v osovej súmernosti podľa priamky CI sa priesečníky kružnice k_1 so stranou AC zobrazia na priesečníky kružnice k_2 so stranou BC.

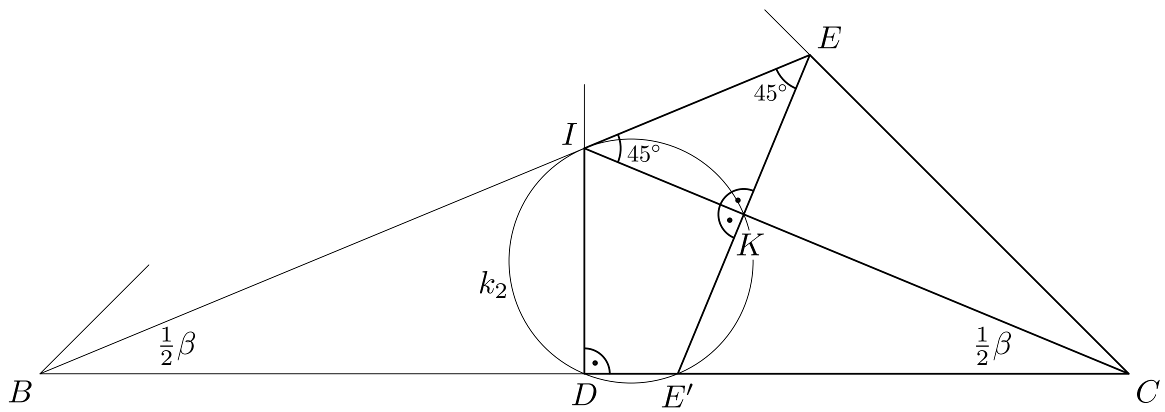


Obr. 2

Keďže jeden zo spoločných bodov kružnice k_1 a priamky AC je bod E a jeden zo spoločných bodov kružnice k_2 a priamky BC je bod D, môžu nastať dva prípady.

Prípad 1. Bod D je obrazom bodu E v osovej súmernosti podľa CI (Tento prípad zahŕňa aj možnosť, že kružnice k_1, k_2 sa dotýkajú priamok AC, BC – vtedy sú E a D jediné „priesečníky" kružníc s priamkami a nutne musia byť navzájom súmerné). Potom sú osovo súmerné podľa CI celé trojuholníky CID a CIE, z ktorých prvý je pravouhlý. Nutne teda aj uhol CEI je pravý, čo znamená, že v trojuholníku ABC je os uhla pri vrchole B totožná s výškou na stranu AC. To je zrejme možné jedine v prípade, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AC. Avšak podľa zadania je rovnoramenným so základňou AB. Takže musí byť rovnostranný, z čoho $|\measuredangle CAB| = = 60^\circ$.

Prípad 2. Kružnica k_2 pretína priamku BC v dvoch rôznych bodoch D a E', pričom E' a E sú súmerné podľa priamky CI. Keďže E' leží na BC, uhol IDE' je pravý a teda IE' je priemerom Tálesovej kružnice prechádzajúcej bodom D. Táto kružnica je evidentne totožná s k_2, preto aj uhol IKE' je pravý (obr. 3). Vzhľadom na spomenutú



Obr. 3

súmernosť je potom pravý aj uhol IKE a tretí uhol v trojuholníku IKE musí mať veľkosť

$$|\measuredangle EIK| = 180^\circ - |\measuredangle IKE| - |\measuredangle IEK| = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Ak označíme β veľkosť vnútorného uhla v rovnoramennom trojuholníku ABC pri vrcholoch B a C, tak rovnoramenný trojuholník BCI má pri základni BC vnútorné uhly veľkosti $\frac{1}{2}\beta$ a oproti základni uhol veľkosti $180° - |\measuredangle EIK| = 180° - 45° = 135°$. Z rovnosti

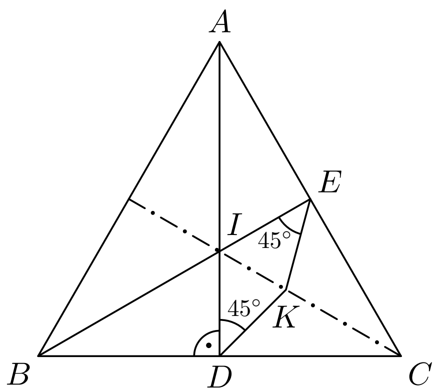
$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\beta + 135° = 180°$$

už triviálne dopočítame $\beta = 45°$, čiže $|\measuredangle CAB| = 180° - 2\beta = 90°$.

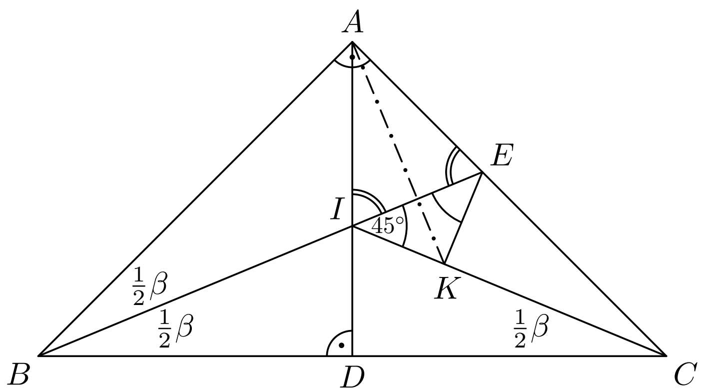
Teda jediné prípustné hodnoty pre veľkosť uhla CAB sú $60°$ a $90°$. Pre dokončenie úlohy ešte musíme dokázať, že pre rovnoramenný trojuholník so základňou BC a uhlom CAB veľkosti $60°$ resp. $90°$ je veľkosť uhla BEK skutočne $45°$. (Zatiaľ sme dokázali len jeden smer implikácie: ak $|\measuredangle BEK| = 45°$, tak $|\measuredangle CAB| \in \{60°, 90°\}$. Potrebujeme dokázať aj opačný smer, t. j. že hodnoty $60°$ a $90°$ sú v zadanej situácii naozaj možné veľkosti uhla CAB.)

Každý z oboch prípadov preveríme osobitne. Možných postupov je viacero, v daných konfiguráciách je trojuholník ABC (až na veľkosť strany BC) jednoznačne daný, takže sa jedná o štandardnú úlohu. Uvedieme postup bez použitia goniometrických funkcií alebo analytickej geometrie.

Ak $|\measuredangle CAB| = 60°$, tak ABC je rovnostranný trojuholník (obr. 4a). Zo symetrie potom $|\measuredangle BEK| = |\measuredangle ADK| = 45°$ (keďže K leží na osi pravého uhla ADC).



Obr. 4a



Obr. 4b

Ak $|\measuredangle CAB| = 90° = \alpha$, tak $\beta = 45°$ a ľahko vypočítame veľkosti

$$\begin{aligned}
|\measuredangle EIK| &= |\measuredangle CBI| + |\measuredangle BCI| = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\beta = \beta = 45°,\\
|\measuredangle AEI| &= 180° - \alpha - \tfrac{1}{2}\beta = 180° - 90° - 22{,}5° = 67{,}5°,\\
|\measuredangle AIE| &= |\measuredangle BID| = 180° - 90° - \tfrac{1}{2}\beta = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°.
\end{aligned}$$

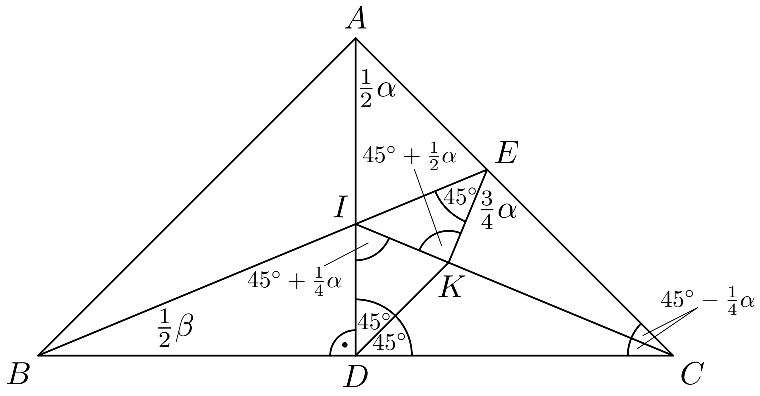
Teda AIE je rovnoramenný trojuholník so základňou IE a body I, E sú súmerne združené podľa priamky AK, ktorá je osou uhla CAD (obr. 4b). Odtiaľ $|KI| = |KE|$, čiže KIE je rovnoramenný trojuholník a $|\measuredangle BEK| = |\measuredangle EIK| = 45°$.

Iné riešenie. Označme $|\measuredangle BAC| = \alpha$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle BCA| = \beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Bod I nech je rovnako ako v predošlom riešení stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. Bod K leží na priesečníkoch osí uhlov trojuholníka ADC, preto

$$|\measuredangle ECK| = |\measuredangle KCD| = \tfrac{1}{2}\beta = 45° - \tfrac{1}{4}\alpha \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle CDK| = |\measuredangle KDA| = 45°.$$

Z trojuholníka DCI potom $|\angle DIC| = 45^\circ + \frac{1}{4}\alpha$. Pomocou zadaného predpokladu $|\angle BEK| = 45^\circ$ následne z trojuholníkov BCE a KCE odvodíme

$$|\angle KEC| = 180^\circ - \tfrac{1}{2}\beta - \beta - 45^\circ = 135^\circ - \tfrac{3}{2}\beta = 135^\circ - \tfrac{3}{2}(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{3}{4}\alpha,$$
$$|\angle IKE| = \tfrac{3}{4}\alpha + 45^\circ - \tfrac{1}{4}\alpha = 45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha.$$



Obr. 5

Zo sínusových viet v trojuholníkoch ICE, IKE, IDK, IDC teda máme (obr. 5)

$$\frac{|IC|}{|IE|} = \frac{\sin(45^\circ + \frac{3}{4}\alpha)}{\sin(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}, \qquad \frac{|IE|}{|IK|} = \frac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin 45^\circ},$$
$$\frac{|IK|}{|ID|} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(90^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}, \qquad \frac{|ID|}{|IC|} = \frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}{\sin 90^\circ}.$$

Vynásobením uvedených štyroch rovností dostaneme

$$1 = \frac{\sin(45^\circ + \frac{3}{4}\alpha)\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(90^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}.$$

Použitím známych goniometrických identít

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x \qquad \text{a} \qquad \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

rovnicu upravíme na

$$\cos \tfrac{1}{4}\alpha = \frac{1}{2}(\cos \tfrac{1}{4}\alpha - \cos(90^\circ + \tfrac{5}{4}\alpha)),$$
$$\frac{1}{2}(\cos(90^\circ + \tfrac{5}{4}\alpha) + \cos \tfrac{1}{4}\alpha) = 0.$$

Použitím ďalšej identity $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\cos\frac{1}{2}(x - y)$ napokon získame

$$\cos(45^\circ + \tfrac{3}{4}\alpha) \cdot \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) = 0.$$

To znamená (keďže $0^\circ < \alpha < 180^\circ$), že buď $45^\circ + \frac{3}{4}\alpha = 90^\circ$, t. j. $\alpha = 60^\circ$, alebo $45^\circ + \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ$, t. j. $\alpha = 90^\circ$. Takže jediné prípustné hodnoty pre veľkosť uhla CAB sú 60° a 90°. Na druhej strane, pri oboch týchto hodnotách platí $|\angle BEK| = 45^\circ$, čo možno ukázať rovnako ako v prvom riešení.

5. *Určte všetky také funkcie f z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel, že pre všetky kladné celé čísla a, b existuje nedegenerovaný trojuholník so stranami dĺžok*

$$a, \quad f(b), \quad f(b+f(a)-1).$$

(Trojuholník je nedegenerovaný, ak jeho vrcholy neležia na jednej priamke.)

(*Francúzsko*)

Riešenie. Trojuholníkovú nerovnosť pre trojicu čísel x, y, z budeme používať aj v tvare $|x-y|<z$ (táto nerovnosť zahŕňa $x<y+z$ a zároveň $y<x+z$). Označme $f(1)=m$. Po dosadení $a=1$ dostávame, že čísla 1, $f(b)$, $f(b+m-1)$ sú pre každé prirodzené b stranami trojuholníka, spĺňajú teda nerovnosť

$$|f(b)-f(b+m-1)|<1,$$

čo je vzhľadom na celočíselnosť hodnôt $f(b)$, $f(b+m-1)$ možné jedine v prípade, že $f(b)=f(b+m-1)$.

Ak by bolo $m>1$, tak f by bola periodická s periódou $m-1$. V takom prípade by (periodicky) nadobúdala iba hodnoty

$$f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(m-1).$$

Ak označíme H najväčšiu z týchto hodnôt, po dosadení $a=2H$ dostávame, že čísla $2H$, $f(b)$, $f(b+f(2H)-1)$ spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť

$$2H<f(b)+f(b+f(2H)-1)\leqq H+H=2H,$$

čo je očividne spor.

Nutne teda $m=1$, t. j. $f(1)=1$. Dosadením $b=1$ z toho dostávame, že čísla a, 1, $f(f(a))$ sú pre ľubovoľné prirodzené číslo a stranami trojuholníka, takže $|a-f(f(a))|<$ <1, čo opäť vzhľadom na celočíselnosť a a $f(f(a))$ znamená

$$f(f(a))=a \quad \text{pre všetky prirodzené čísla } a. \tag{1}$$

Označme $f(2)=k$. Zrejme $k\neq 1$, lebo podľa (1) máme $f(k)=f(f(2))=2$, zatiaľ čo $f(1)=1$. Z (1) dokonca vyplýva, že funkcia f je prostá, t. j. žiadnu hodnotu nenadobúda viac než raz. Ak totiž $f(x)=f(y)$, tak nutne $x=f(f(x))=f(f(y))=y$. Tento známy fakt (že z (1) vyplýva prostosť f) budeme v riešení využívať.

Položme $a=2$, $b=k$. Potom 2, 2 a $f(k+k-1)=f(2k-1)$ sú stranami trojuholníka, čiže

$$|f(2k-1)-2|<2, \qquad \text{a odtiaľ} \quad f(2k-1)\in\{1,2,3\}.$$

Avšak f už nadobúda hodnotu 1 v bode 1 a hodnotu 2 v bode k a zároveň $2k-1\neq 1$ a $2k-1\neq k$. Z prostosti f teda nutne vyplýva $f(2k-1)=3$.

Položme ďalej $a=2$, $b=2k-1$. Z toho 2, 3 a $f(2k-1+k-1)=f(3k-2)$ sú stranami trojuholníka a analogicky dostávame

$$|f(3k-2)-3|<2, \qquad \text{čiže} \quad f(3k-2)\in\{2,3,4\}.$$

Keďže hodnoty 2, 3 už f nadobúda v bodoch k, $2k-1$ a zároveň $3k-2 \neq k$ a $3k-2 \neq$ $\neq 2k-1$, nutne $f(3k-2)=4$.

Matematickou indukciou (ktorej prvý krok sme pre hodnoty $n=1,2,3$ práve urobili) ľahko dokážeme, že

$$f(nk-(n-1)) = n+1 \qquad \text{pre všetky prirodzené čísla } n.$$

Ak totiž toto tvrdenie platí pre n aj pre $n-1$, po dosadení $a=2$, $b=nk-(n-1)$ dostávame trojicu strán 2, $n+1$ a $f(nk-(n-1)+k-1)=f((n+1)k-n)$, teda

$$|f((n+1)k-n)-(n+1)| < 2, \qquad \text{odkiaľ} \quad f((n+1)k-n) \in \{n, n+1, n+2\}.$$

Hodnoty n a $n+1$ sú však podľa indukčného predpokladu už „obsadené“ bodmi $(n-1)k-(n-2)$ a $nk-(n-1)$ (ktoré sú oba rôzne od $(n+1)k-n$), takže jedinou možnosťou je $f((n+1)k-n)=n+2$ a tvrdenie platí aj pre $n+1$. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Špeciálne potom tvrdenie platí aj pre $n=k-1$, teda

$$f((k-1)k-(k-2)) = k.$$

Keďže sme už skôr ukázali, že $f(2)=k$, z prostosti f máme $(k-1)k-(k-2)=2$, z čoho po triviálnej úprave $k(k-2)=0$. Samozrejme $k \neq 0$, dostávame tak $k=2$ a indukciou dokázané tvrdenie prechádza na tvar

$$f(n+1) = n+1 \qquad \text{pre všetky prirodzené čísla } n.$$

Spolu s tvrdením $f(1)=1$, ktoré sme dokázali na začiatku, dostávame, že jedinou vyhovujúcou funkciou môže byť identita $f(x)=x$. Ľahko overíme, že táto funkcia vyhovuje, lebo trojica čísel a, b, $a+b-1$ spĺňa všetky tri trojuholníkové nerovnosti triviálne (pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{N}$).

---

6. *Nech a_1, a_2, …, a_n sú navzájom rôzne kladné celé čísla a M je množina $n-1$ kladných celých čísel neobsahujúca číslo $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Lúčny koník skáče pozdĺž číselnej osi, pričom začína v bode 0 a urobí smerom doprava n skokov s dĺžkami a_1, a_2, …, a_n v nejakom poradí. Dokážte, že poradie skokov sa dá zvoliť tak, aby lúčny koník nepristál na žiadnom čísle z množiny M.* (Rusko)

Riešenie. Na začiatku si všimnime, že zo zadaného tvrdenia vyplýva jeho zovšeobecnenie: Predpoklad, že množina M obsahuje práve $n-1$ kladných celých čísel možno nahradiť podmienkou $|M \cap (0, s-a_{\min}\rangle| \leqq n-1$, pričom $a_{\min}$ je najmenšie spomedzi a_1, a_2, …, a_n. Tento fakt v dôkaze použijeme.

Postupovať budeme matematickou indukciou vzhľadom na n. Prípad $n=1$ je triviálny. V druhom kroku indukcie predpokladajme, že $n>1$ a že tvrdenie je pravdivé pre všetky prirodzené čísla menšie ako n. Ďalej nech a_1, a_2, …, a_n, s, M sú dané a spĺňajú predpoklady dokazovaného tvrdenia. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1$. Označme

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, n.$$

Zrejme $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = s$. Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie.

Tvrdenie 1. Stačí ukázať, že pre nejaké $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ dokáže urobiť koník m skokov, pričom nikdy nepristane na čísle z M a navyše počas týchto m skokov preskočí spolu aspoň ponad m bodov z M.

Dôkaz. Keďže $|M| = n-1$, evidentne $m \neq n$. Položme $n' = n - m$. Potom $1 \leqq n' < n$. Zvyšných n' skokov bez pristátia na ktoromkoľvek zo zvyšných zakázaných nanajvýš $n' - 1$ čísel z M dokáže koník urobiť vďaka indukčnému predpokladu (stačí posunúť začiatok z čísla 0 do čísla, kde sa koník nachádza po m skokoch). $\square$

Číslo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ budeme nazývať *slušné*, ak koník dokáže urobiť k skokov s dĺžkami a_1, a_2, …, a_k (v nejakom poradí) tak, že s výnimkou posledného skoku nikdy nepristane na čísle z M (po k-tom skoku môže a nemusí skončiť na čísle z M).

Číslo 1 je očividne slušné. Preto existuje najväčšie číslo k^* také, že všetky čísla 1, 2, …, k^* sú slušné. Ak $k^* = n$, niet čo dokazovať. Zaoberajme sa ďalej len prípadom $k^* \leqq n-1$ (teda k^*+1 nie je slušné). Dokážeme ďalšie pomocné tvrdenie.

Tvrdenie 2. Platí

$$T_{k^*} \in M \qquad \text{a} \qquad |M \cap (0, T_{k^*})| \geqq k^*.$$

Dôkaz. Ak $T_{k^*} \notin M$, postupnosť skokov, vďaka ktorej je číslo k^* slušné, možno predĺžiť pridaním skoku dĺžky a_{k^*+1}, čo je v spore s tým, že k^*+1 nie je slušné. Takže nutne $T_{k^*} \in M$.

Ak $|M \cap (0, T_{k^*})| < k^*$, tak existuje $l \in \{1, 2, \dots, k^*\}$ také, že $T_{k^*+1} - a_l \notin M$. Potom podľa indukčného predpokladu (s hodnotou k^* namiesto n) dokáže koník doskákať do čísla $T_{k^*+1} - a_l$ pomocou k^* skokov s dĺžkami z množiny $\{a_1, a_2, \dots, a_{k^*} + 1\} \setminus \{a_l\}$, pričom ani raz nepristane na čísle z M. Takže aj k^*+1 je slušné, čo je spor. $\square$

Podľa práve dokázaného tvrdenia existuje najmenšie číslo $\tilde{k} \in \{1, 2, \dots, k^*\}$ také, že

$$T_{\tilde{k}} \in M \qquad \text{a} \qquad |M \cap (0, T_{\tilde{k}})| \geqq \tilde{k}.$$

Tvrdenie 3. Stačí uvažovať prípad

$$|M \cap (0, T_{\tilde{k}-1}\rangle| \leqq \tilde{k} - 1. \tag{1}$$

Dôkaz. Ak $\tilde{k} = 1$, tak (1) platí triviálne. Ďalej nech $\tilde{k} > 1$. Ak $T_{\tilde{k}-1} \in M$, tak (1) vyplýva z minimálnosti $\tilde{k}$. Ak $T_{\tilde{k}-1} \notin M$ a platilo by $|M \cap (0, T_{\tilde{k}-1}\rangle| \geqq \tilde{k} - 1$, zo slušnosti čísla $\tilde{k} - 1$ by sme dostali situáciu ako v Tvrdení 1 pre $m = \tilde{k} - 1$. V tomto prípade teda dokonca stačí uvažovať prípad $|M \cap (0, T_{\tilde{k}-1}\rangle| \leqq \tilde{k} - 2$. $\square$

Označme $v \geqq 0$ číslo, pre ktoré $|M \cap (0, T_{\tilde{k}})| = \tilde{k} + v$. Nech $r_1 > r_2 > \dots > r_p$ sú všetky také indexy $r \in \{\tilde{k}+1, \tilde{k}+2, \dots, n\}$, že $T_{\tilde{k}} + a_r \notin M$. Potom

$$n - 1 = |M| = |M \cap (0, T_{\tilde{k}})| + 1 + |M \cap (T_{\tilde{k}}, s)| \geqq \tilde{k} + v + 1 + (n - \tilde{k} - p)$$

a odtiaľ $p \geqq v + 2$. Platí

$$T_{\tilde{k}} + a_{r_1} - a_1 < T_{\tilde{k}} + a_{r_1} - a_2 < \dots < T_{\tilde{k}} + a_{r_1} - a_{\tilde{k}} < T_{\tilde{k}} + a_{r_2} - a_{\tilde{k}} < \dots < T_{\tilde{k}} + a_{r_{v+2}} - a_{\tilde{k}}$$

a všetkých $\tilde{k}+v+1$ čísel porovnaných v predošlých nerovnostiach leží v intervale $(0, T_{\tilde{k}})$. Preto existujú $r \in \{\tilde{k}+1, \tilde{k}+2, \ldots, n\}$ a $q \in \{1, 2, \ldots, \tilde{k}\}$ také, že $T_{\tilde{k}} + a_r \notin M$ a $T_{\tilde{k}} + a_r - a_q \notin M$. Zoberme množinu skokových dĺžok $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\tilde{k}}, a_r\} \setminus \{a_q\}$. Máme

$$\sum_{x \in B} x = T_{\tilde{k}} + a_r - a_q$$

a

$$T_{\tilde{k}} + a_r - a_q - \min(B) = T_{\tilde{k}} - a_q \leqq T_{\tilde{k}-1}.$$

Podľa (1), indukčného predpokladu a zovšeobecnenia spomenutého úplne na začiatku s hodnotou $\tilde{k}$ namiesto n sa koník dokáže dostať na číslo $T_{\tilde{k}} + a_r - a_q$ pomocou $\tilde{k}$ skokov s dĺžkami z množiny B bez pristátia na čísle z M. Odtiaľ vie skočiť na $T_{\tilde{k}} + a_r$, čím dosiahneme situáciu ako v Tvrdení 1 s hodnotou $m = \tilde{k} + 1$. Tým je tvrdenie dokázané.