2008/2009
58. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh MEMO*

I-1. *Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že*

$$f(xf(y))+f(f(x)+f(y))=yf(x)+f(x+f(y))$$

pre všetky $x,y\in\mathbb{R}$, pričom $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. (Slovinsko)

Riešenie. Konštantná funkcia $f(x)=0$ zrejme vyhovuje. Predpokladajme ďalej, že existuje $a\in\mathbb{R}$ také, že $f(a)=0$. Dokážeme, že potom je f prostá.

Nech $f(y_1)=f(y_2)$ pre nejaké $y_1,y_2\in\mathbb{R}$. Po postupnom dosadení $y=y_1$, $y=y_2$ do zadanej rovnice a odčítaní vzniknutých rovností dostaneme $y_1f(x)=y_2f(x)$ pre všetky $x\in\mathbb{R}$. Po zvolení $x=a$ môžeme $f(a)$ vykrátiť, teda $y_1=y_2$ a f je naozaj prostá.

Dosadením $x=0$, $y=1$ do pôvodnej rovnice získame

$$f(0)+f(f(0)+f(1))=f(0)+f(f(1)),$$

teda $f(f(0)+f(1))=f(f(1))$ a vzhľadom na prostosť f máme $f(0)+f(1)=f(1)$, odkiaľ $f(0)=0$.

Zvolením $y=0$ následne zo zadanej rovnice dostaneme $f(f(x))=f(x)$, z čoho opäť vďaka prostosti vyplýva $f(x)=x$ pre všetky $x\in\mathbb{R}$. Aj táto funkcia vyhovuje, o čom sa dosadením ľahko presvedčíme. Jedinými riešeniami sú teda funkcie $f(x)=0$ a $f(x)=x$.

I-2. *Majme $n\geqq 3$ rôznych farieb. Nech $f(n)$ označuje najväčšie celé číslo s vlastnosťou, že každá strana a každá uhlopriečka konvexného mnohouholníka majúceho $f(n)$ vrcholov sa dá ofarbiť jednou z n farieb nasledujúcim spôsobom:*

- *použité sú aspoň dve farby a*
- *každé tri vrcholy mnohouholníka určujú buď trojicu úsečiek rovnakej farby, alebo trojicu úsečiek troch rôznych farieb.*

Dokážte, že $f(n)\leqq(n-1)^2$, a že rovnosť v tejto nerovnosti nastáva pre nekonečne veľa hodnôt n. (Slovinsko)

Riešenie. V úlohe ide o mnohouholník s ofarbenými všetkými uhlopriečkami aj stranami, môžeme teda o ňom uvažovať ako o kompletnom grafe. Farbíme všetky hrany s použitím n farieb tak, že každý trojuholník resp. kompletný trojbodový podgraf, tzv. 3-klika, bude buď jednofarebný alebo trojfarebný. Celý graf ale nemôže byť jednofarebný.

Vzácny čitateľ isto rýchlo pochopí, že podmienka pre trojuholníky je v skutočnosti ekvivalentná s nasledovnou podmienkou. Graf pozostáva výlučne z kompletných jednofarebných podgrafov, tzv. klík, pričom dve kliky jednej farby sú vrcholovo disjunktné. Otázne už je len ako veľké môžu takéto kliky byť a koľko ich bude najviac z jednej farby.

Ak by jedna z týchto jednofarebných klík (povedzme modrá) mala n alebo viac vrcholov, musel by existovať vrchol v mimo nej, ktorý by bol s každým vrcholom modrej kliky spojený inou ako modrou farbou. Všetky trojuholníky tvorené dvoma vrcholmi z modrej kliky a vrcholom v obsahujú jednu modrú a jednu inú hranu, sú teda trojfarebné. Čiže n hrán spájajúcich vrchol v s modrou klikou by muselo byť navzájom rôznofarebných, čo nie je možné, lebo okrem modrej farby máme k dispozícii už len $n-1$ farieb. Preto každá jednofarebná klika má maximálne $n-1$ vrcholov.

Jeden vrchol leží v maximálne n rôznych klikách (rôznej farby) a každá z nich má najviac $n-2$ ďalších vrcholov. Tento vrchol má teda najviac $n(n-2)$ susedov. V grafe je teda nanajvýš $f(n) = n(n-2) + 1 = (n-1)^2$ vrcholov.

V druhej časti úlohy sa budeme zaoberať konštrukciou n-farebného ofarbenia hrán kompletného grafu s $(n-1)^2$ vrcholmi pre čo najviac rôznych hodnôt čísla n. Všimnime si, že dve kliky rôznych farieb majú v tomto maximálnom prípade práve jeden spoločný vrchol a dve kliky rovnakej farby ani jeden. Natíska sa tu idea nakresliť si všetky body jednej kliky na priamku jednej farby. Body kliky inej farby budú na priamke nielen inej farby ale aj iného smeru tak, aby priesečník týchto dvoch priamok reprezentoval spoločný vrchol príslušných dvoch klík. Dve kliky rovnakej farby by sa dali reprezentovať rovnobežkami.

Skutočnosť, že vrcholov je dokopy $(n-1)^2$, nám našepkáva umiestniť ich do štvorca (vrcholy teda budeme reprezentovať súradnicami (i, j), pričom $i, j \in \{0, 1, \dots , n-2\}$) a pospájať ich pomocou $n-1$ vodorovných priamok prvej farby. Potom ich pospájame $n-1$ zvislými priamkami druhej farby. Prvá priamka tretej farby pôjde po hlavnej diagonále bodmi tvaru (k, k) kde $k \in \{0, \dots , n-2\}$. Ostatné budú rovnobežne s ňou spájať všetky body tvaru $((a + k) \bmod (n-1), k)$. Budú to vlastne všetky priamky so smernicou 1, ktoré keď „vybehnú“ vpravo zo štvorca, vrátia sa v príslušnej výške zľava. Dá sa to predstaviť aj tak, že by sme pravý okraj štvorca (s prvou súradnicou $n-1$) stotožnili s ľavým (s prvou súradnicou 0). Vznikol by tak valec.

Podobne smernica všetkých $n-1$ priamok štvrtej farby bude 2 a princíp kongruencie sa tu bude uplatňovať nielen v pravo-ľavom smere ale aj zdola nahor. Dalo by sa to predstaviť tak, že v spomínanom valci navyše stotožníme spodný okraj s horným (vznikol by tzv. torus). Podobne smernice ostatných $(n-1)$-tíc priamok budú vždy 3, 4, $\dots$, $(n-2)$.

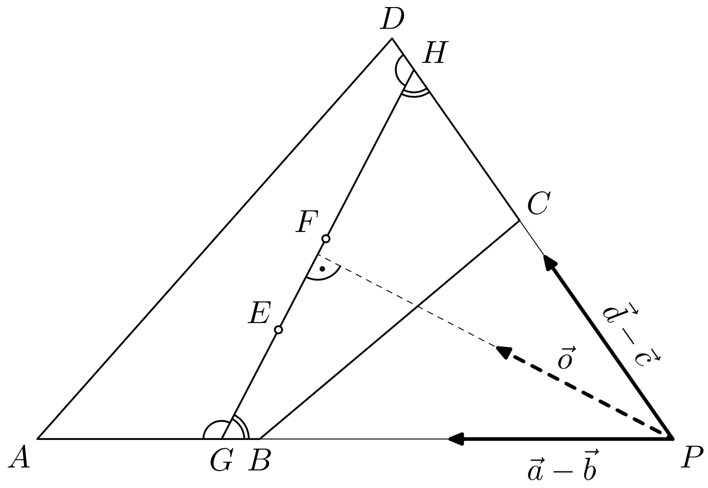
Ak $n-1$ je prvočíslo, dá sa poľahky ukázať, že táto konštrukcia zaručí, že prienik dvoch klík rôznej farby bude práve jeden vrchol. Keďže prvočísel je nekonečne veľa, máme nekonečne veľa rôznych n, pre ktoré $f(n) = (n-1)^2$. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Skúste sami, či by ste vedeli vymyslieť konštrukciu, ktorá by niečo podobné zaručovala pre širšiu množinu čísel ako je množina tých n, že $n-1$ je prvočíslo.

I-3. *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom strany AB a CD nie sú rovnobežné a $|AB| = |CD|$. Stredy uhlopriečok AC a BD označme E a F. Priamka EF pretína úsečky AB, CD postupne v bodoch G, H. Dokážte, že $|\angle AGH| = |\angle DHG|$.*

(*Maďarsko*)

Riešenie. Zvoľme za počiatok súradnicovej sústavy priesečník P priamok AB a CD. Polohové vektory bodov A, B, C, D označíme postupne $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Potom smerové



Obr. 1

vektory priamok AB, CD sú $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{d}-\vec{c}$ a keďže podľa zadania majú rovnakú veľkosť, smerový vektor osi uhla nimi tvoreného je

$$\vec{o}=\frac{(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{d}-\vec{c})}{2}.$$

Stredy E, F uhlopriečok AC, BD majú polohové vektory $\vec{e}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$, $\vec{f}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$. Z rovnosti $|AB|=|CD|$ vyplýva

$$0=(\vec{a}-\vec{b})^2-(\vec{d}-\vec{c})^2=\Big((\vec{a}-\vec{b})-(\vec{d}-\vec{c})\Big)\cdot\Big((\vec{a}-\vec{b})+(\vec{d}-\vec{c})\Big)=$$
$$=4\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\right)\cdot\frac{(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{d}-\vec{c})}{2}=4(\vec{e}-\vec{f}\,)\cdot\vec{o}$$

(všetky uvedené násobenia a druhé mocniny vektorov sú *skalárne* súčiny). Teda os uhla zovretého priamkami AB a CD je kolmá na priamku EF a trojuholník GHP je rovnoramenný so základňou GH (os uhla je totožná s výškou jedine v rovnoramennom trojuholníku, obr. 1). Keďže body A a D ležia v tej istej polrovine určenej priamkou GH, uhly AGH a DHG sú zhodné (buď sú oba vnútornými uhlami pri základni rovnoramenného trojuholníka, alebo sú ich doplnkami do $180°$).

I-4. *Nájdite všetky celé čísla $k\geqq 2$ také, že číslo $n^{n-1}-m^{m-1}$ nie je deliteľné číslom k pre žiadnu dvojicu (m,n) rôznych kladných celých čísel menších alebo rovných k.*

(Švajčiarsko)

Riešenie. Podmienka v zadaní je ekvivalentná s injektívnosťou funkcie

$$f(m)=m^{m-1} \bmod k$$

na obore zvyškových tried po delení číslom k.

Skúsime za k dosadiť najskôr malé hodnoty a všimneme si, že pre $k=2$ a $k=3$ je táto funkcia injektívnou. Navyše pre každé k platí $f(1)=1$ a $f(k)=0$. Pre párne k väčšie ako 2 dostávame

$$f(k-1)\equiv(k-1)^{k-2}\equiv 1=f(1)\pmod{k},$$

teda funkcia f nie je injektívna. Ak sa v rozklade čísla k na súčin prvočísel nachádza niektoré prvočíslo, nazvime ho p, viac ako raz, potom

$$f(k/p) = 0 = f(k).$$

Ďalšie vyhovujúce k môžu teda mať v rozklade len rôzne nepárne prvočísla. Uvažujme teraz vyhovujúce nepárne k väčšie ako 4. Hodnoty $f(k)$, $f(k-2), \ldots, f(3)$, $f(1)$ a $f(4) \equiv \equiv 4^3 = 8^2 \pmod{k}$ sú všetko zvyšky druhých mocnín prirodzeného čísla po delení číslom k a je ich spolu $\frac{1}{2}(k+1)+1$. Ale rôznych kvadratických zvyškov je nanajvýš $\frac{1}{2}(k+1)$, lebo $a^2 \equiv (k-a)^2 \pmod{k}$. Čiže aspoň dve zo spomenutých hodnôt funkcie f budú rovnaké a funkcia nebude injektívna. Okrem hodnôt 2 a 3 už ďalšie vyhovujúce k neexistuje.

T-1. *Reálne čísla x, y, z spĺňajú podmienku $x^2+y^2+z^2+9 = 4(x+y+z)$. Dokážte, že*

$$x^4+y^4+z^4+16(x^2+y^2+z^2) \geqq 8(x^3+y^3+z^3)+27$$

a zistite, kedy v nerovnosti platí rovnosť. (*Slovensko, Ján Mazák*)

Riešenie. Danú podmienku možno prepísať na tvar

$$x(x-4)+y(y-4)+z(z-4) = -9$$

a skúmanú nerovnosť zase na nápadne podobný tvar

$$x^2(x-4)^2+y^2(y-4)^2+z^2(z-4)^2 \geqq 27.$$

Teraz už len vhodne použijeme Cauchyho nerovnosť pre dvojicu vektorov $(1,1,1)$ a $(x(x-4), y(y-4), z(z-4))$:

$$\begin{aligned}81 = (-9)^2 = \bigl(1\cdot x(x-4)+1\cdot y(y-4)+1\cdot z(z-4)\bigr)^2 \leqq\\ \leqq (1^2+1^2+1^2)\bigl(x^2(x-4)^2+y^2(y-4)^2+z^2(z-4)^2\bigr).\end{aligned}$$

Rovnosť v Cauchyho nerovnosti nastáva práve vtedy, keď

$$x(x-4) = y(y-4) = z(z-4) = -3.$$

Riešením je 8 usporiadaných trojíc

$$(1,1,1),\ (1,1,3),\ (1,3,1),\ (3,1,1),\ (1,3,3),\ (3,1,3),\ (3,3,1),\ (3,3,3).$$

Iné riešenie. S využitím väzby $x^2+y^2+z^2+9 = 4(x+y+z)$ možno zadanú nerovnosť ekvivalentne upraviť na tvar

$$(x-2)^4+(y-2)^4+(z-2)^4 \geqq 3,$$

zatiaľ čo samotnú väzbu priamo prepíšeme na $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 3$. Pre trojicu reálnych čísel u, v, w spĺňajúcich $u^2+v^2+w^2 = 3$ však platí

$$\begin{aligned}(u^2-1)^2+(v^2-1)^2+(w^2-1)^2 &\geqq 0,\\ u^4+v^4+w^4+3 &\geqq 2(u^2+v^2+w^2) = 6,\\ u^4+v^4+w^4 &\geqq 3,\end{aligned}$$

čo je po substitúcii $u = x-2$, $v = y-2$, $w = z-2$ ekvivalentné s dokazovaným tvrdením. Rovnosť zrejme nastáva, keď $u^2 = v^2 = w^2 = 1$, z čoho dostaneme rovnaké trojice ako v prvom riešení.

T-2. *Dané sú reálne čísla a, b, c, pričom ku každým dvom rovniciam spomedzi*

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

existuje práve jedno reálne číslo, ktoré je riešením obidvoch. Určte všetky možné hodnoty výrazu $a^2 + b^2 + c^2$. (*Slovensko, Pavel Novotný*)

Riešenie. Vyšetríme dva prípady.

Ak všetky tri rovnice majú jeden spoločný koreň x_1, tak

$$x_1^2 + ax_1 + b = 0, \tag{1}$$
$$x_1^2 + bx_1 + c = 0, \tag{2}$$
$$x_1^2 + cx_1 + a = 0. \tag{3}$$

Potom kombináciou rovností $((1) - (2)) + (x_1 - 1)((1) - (3))$ a úpravou dostaneme

$$(x_1^2 - x_1 + 1)(a - c) = 0,$$

čo vzhľadom na nenulovosť kvadratického výrazu $x_1^2 - x_1 + 1$ (so záporným diskriminantom) znamená $a = c$. Pomocou cyklickej zámeny dostaneme $c = b = a$, a aby mali každé dve z troch totožných kvadratických rovníc $x^2 + ax + a$ práve jedno spoločné riešenie, musia mať dvojnásobný koreň. Odtiaľ $a^2 - 4a = 0$, teda $a = b = c = 0$ alebo $a = b = c = 4$, z čoho $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, resp. 48.

Druhý prípad, kedy jedna rovnica má korene x_1, x_2, druhá rovnica má korene x_2, x_3 a tretia x_1, x_3 (pričom všetky tri korene sú rôzne, inak by sme mali predošlý prípad) sa vyšetruje už o niečo komplikovanejšie. Treba sa prirodzene zaoberať koeficientmi polynómu

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + c)(x^2 + cx + a), \tag{4}$$

o ktorom vieme, že má tri dvojnásobné nulové body a teda tvar

$$(x^3 - px^2 + qx - r)^2, \tag{5}$$

pričom navyše z Vièteovych vzťahov pre pôvodné polynómy vyplýva

$$2p = 2(x_1 + x_2 + x_3) = -(a + b + c) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -q, \tag{6}$$

Ak označíme $a + b + c = e$, $ab + bc + ca = f$, $abc = g$, tak roznásobením totožných polynómov (4) a (5) a porovnaním ich koeficientov pri mocninách x^5, x^4, x^3 a x^0 dostaneme postupne

$$e = -2p, \qquad e + f = p^2 - 4p, \qquad e^2 - f + g = 4p^2 - 2r, \qquad g = r^2. \tag{7}$$

Koeficienty pri x^2 a x síce nie sú symetrické v premenných a, b, c (a nedajú sa teda vyjadriť pomocou e, f, g), ale ich súčet symetrický je, teda porovnaním po úprave dostaneme

$$f + ef - 3g = 4p^2 + 6pr. \tag{8}$$

Spojením (6), (7) a (8) dostávame sústavu šiestich rovníc o šiestich neznámych p, q, r, e, f, g. Tú môžeme riešiť viacerými rôznymi spôsobmi. Napríklad z prvých dvoch rovníc máme $q = -2p$, $e = -2p$, teda po dosadení do tretej získame $f = p^2 - 2p$. Z piatej rovnice máme priamo $g = r^2$, teda za všetky premenné q, e, f, g vieme do štvrtej a šiestej rovnice dosadiť výrazy zapísané len premennými p, r. Po úprave dostaneme rovnice

$$(p-1)^2 = (r+1)^2, \qquad -2p^3 + p^2 - 2p - 6pr - 3r^2 = 0.$$

Ak $p-1 = r+1$, dosadením $r = p-2$ do poslednej rovnice dostaneme rovnicu $(p+6)(p-1)^2 = 0$. Ak naopak $p-1 = -(r+1)$, dosadením $r = -p$ dostaneme $p(p-1)^2 = 0$. Ak $p = -6$, dostaneme $r = -8$, $q = 12$, teda polynóm v (5) by bol rovný $(x+2)^6$ a nemal by tri *rôzne* korene. Rovnako nevyhovuje $p = 0$, kedy by uvedený polynóm vyšiel x^6. Jedinou možnosťou je $p = 1$, odkiaľ $r = -1$, $q = -2$, $e = -2$, $f = -1$, $g = 1$ a polynóm v (5) má tvar

$$(x^3 - x^2 - 2x + 1)^2. \tag{9}$$

Ľahko možno nahliadnuť, že tento polynóm má tri rôzne reálne dvojnásobné korene (ležiace postupne vnútri intervalov $(-2,-1)$, $(0,1)$, $(1,2)$). Už len dopočítame $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 - 2f = 6$.

Odpoveď. Uvedený výraz môže nadobúdať hodnoty 0, 6 a 48.

Poznámka. Pre správne riešenie treba ešte zdôvodniť, že k trojici koreňov (x_1, x_2, x_3) polynómu (9) skutočne prislúchajú tri kvadratické rovnice s koeficientmi ako v zadaní. Tento technický krok vynecháme.

T-3. *Na tabuli sú napísané čísla* $0, 1, 2, \ldots, n$, *pričom* $n \geqq 2$. *V každom kroku zotrieme číslo, ktoré je aritmetickým priemerom dvoch rôznych čísel, ktoré ešte na tabuli zostali. Také kroky robíme až do momentu, keď už nemôžeme zotrieť žiadne číslo. Označme* $g(n)$ *najmenší možný počet čísel, ktoré môžu na konci zostať na tabuli. Určte* $g(n)$ *pre každé* n. (*Poľsko*)

Riešenie. Krajné hodnoty 0 a n sa nedajú nijako zotrieť a hravo vyskúšame, že

$$g(1) = g(2) = 2, \qquad g(3) = 3, \qquad g(4) = 2.$$

Technika zotierania použitá pre $n = 4$ sa dá rozšíriť na všetky $n = 2^a$, preto tiež $g(2^a) = 2$ pre všetky prirodzené čísla a.

Majme teraz n, ktoré nie je mocninou dvojky a teda $2^a < n < 2^{a+1}$ pre nejaké prirodzené a. Predstavme si, že by na konci ostali tiež len dve čísla. Pri spätnej rekonštrukcii (t. j. pridávaním aritmetického priemeru niektorých dvoch čísel na tabuli) vieme v ľubovoľnom kroku skonštruovať iba číslo tvaru $tn/2^k$, pričom t a $k \geqq 1$ sú prirodzené čísla. Teda nikdy by takto nevzniklo číslo 1 (keď n nie je mocninou dvoch, ani žiadny jeho násobok ňou nemôže byť), čo je spor[1].

Naopak, existuje postup zotierania najskôr čísel $n-1$, $n-2$ a tak ďalej až po $2^a + 1$ (číslo $n - i$ je aritmetickým priemerom čísel n a $n - 2i$), na ktorý sa dá nadviazať skôr spomenutou technikou zotierania všetkých čísel medzi 0 a 2^a. Na tabuli potom zostanú len tri čísla 0, 2^a, n. Preto ak n nie je mocninou dvojky, tak $g(n) = 3$.

[1] Formálne možno použiť na dôkaz matematickú indukciu.

T-4. *Každé políčko hracej plochy rozmerov* 2009×2009 *ofarbíme jednou z* n *farieb (nemusíme použiť všetky farby). Hovoríme, že daná farba je súvislá, ak má na celej ploche takú farbu iba jedno políčko, alebo ak pre ľubovoľné dve políčka tejto farby môže šachová dáma prejsť z jedného na druhé, pričom nikdy nezastaví na políčku inej farby (šachová dáma sa vie pohybovať vodorovne, zvisle a diagonálne). Nájdite najväčšie také* n*, že pre ľubovoľné ofarbenie hracej plochy je aspoň jedna použitá farba súvislá.*
(*Poľsko*)

Riešenie. Predvedieme jeden príklad ofarbenia plochy $k \times k$ (pre veľké nepárne k) troma nesúvislými farbami 1, 2, 3. Do všetkých políčok napíšeme pre začiatok 0. Vyberieme si dva susediace stĺpce, napríklad druhý a tretí. Do políčka $(2, k)$ pripočítame 1, do políčka $(3, 1)$ zase 2. Teraz do všetkých políčok dosiahnuteľných ťahom dámy z políčka $(2, k)$, okrem tohto políčka samotného, pripočítame 2. Podobne do všetkých políčok dosiahnuteľných ťahom dámy z políčka $(3, 1)$, okrem tohto políčka samotného, pripočítame 1. V tabuľke je znázornená situácia pre $k = 9$.

2	**1**	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3						
	2	1	2					1
	2	1		2			1	
	2	1			2	1		
	2	1			1	2		
1	2	1		1			2	
	3	1	1					2
1	3	**2**	1	1	1	1	1	1

Všimnime si, že pre nepárne k majú políčka $(2, k)$ a $(3, 1)$ rôzne pôvodné „šachovnicové" farby. Preto len 4 políčka vo vybraných dvoch stĺpcoch majú farbu $1 + 2 = 3$. Sú to $(2, 1)$, $(2, 2)$ a $(3, k)$, $(3, k - 1)$. Pre dostatočne veľké nepárne k sú tieto dva súvislé páry vzájomne nesúvislé. Do políčok, kde ešte stále ostala 0, môžeme teraz vpísať ľubovoľné z čísel 1 a 2. Políčka $(2, k)$ a $(3, 1)$ ostanú „izolované" od ostatných políčok svojej farby. Táto technika ofarbovania troma farbami sa dokonca dá poľahky rozšíriť na párne dostatočne veľké k zvolením „izolovaných" políčok $(2, k)$ a $(4, 1)$. Preto n je menšie ako 3.

V druhej časti riešenia naznačíme dôkaz, že pre každú plochu $k \times m$ je v ľubovoľnom jej dvojfarebnom ofarbení aspoň jedna z farieb súvislá. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na súčet rozmerov $k + m$. Prvý indukčný krok je triviálny.

V druhom kroku predpokladajme, že tvrdenie je pravdivé pre ľubovoľnú plochu $k' \times m'$ spĺňajúcu $k' + m' < k + m$. Uvažujme ľubovoľné ofarbenie plochy S s rozmermi $k \times m$ dvoma farbami, napr. červenou a modrou. Označme S_1, S_2, resp. S_3 plochy, ktoré dostaneme z S odstránením prvého stĺpca, posledného stĺpca, resp. posledného riadka. Podľa indukčného predpokladu a Dirichletovho princípu niektoré dve plochy S_i, S_j majú súvislú rovnakú farbu, napr. červenú. Označme $A_0 = S_i \cap S_j$, $A_1 = S_j \setminus S_i$ a $A_2 = S_i \setminus S_j$.

Ľahko možno dokázať pravdivosť nasledujúcich troch pozorovaní:

(1) Ak celá množina A_0 je jednofarebná, napr. modrá, tak modrá farba je súvislá v celej S.

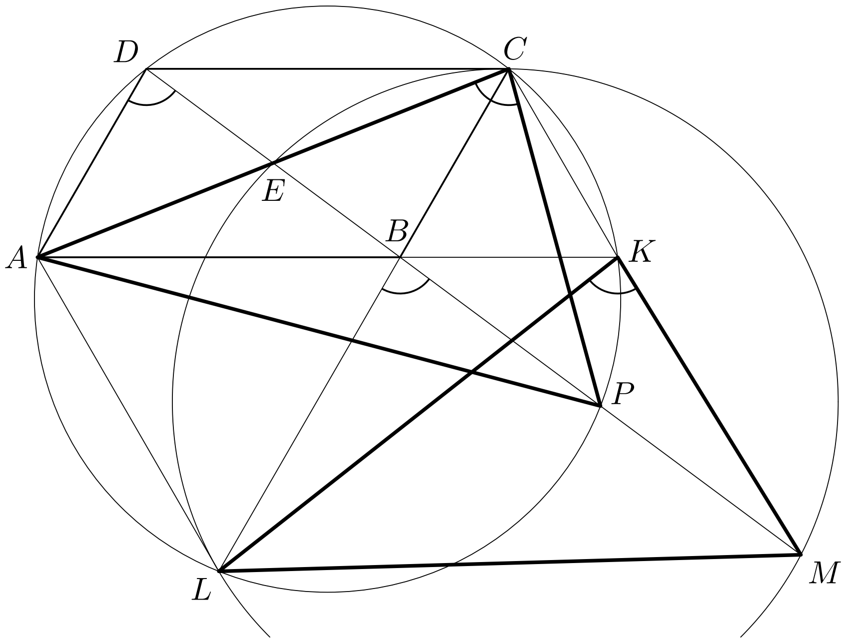
(2) Ak v A_0 existuje červené políčko, tak červená je súvislá v celej množine $S_i \cup S_j$.
(3) Ak množina $A_1 \cup A_2$ je jednofarebná, napr. modrá, tak modrá farba je súvislá v celej S.

Predpokladajme sporom, že v S nie je ani jedna farba súvislá. Potom podľa (1) existuje v A_0 červené políčko. Môžu nastať dve možnosti. Ak $S = S_i \cup S_j$ (t. j. ak $\{i, j\} = \{1, 2\}$), tak podľa (2) je v S súvislá červená farba, čo je spor. V opačnom prípade tvorí množina $S_i \cup S_j$ celú S okrem jedného rohového políčka. Jedinou možnosťou, ako nájsť nesúvislé červené políčka v S, je ofarbiť červenou uvedené rohové políčko a celý zvyšok stĺpca a riadka obsahujúceho toto políčko ofarbiť modrou. Potom je však podľa (5) súvislá modrá farba, čo je opäť spor.

Odpoveď. Najväčšie hľadané číslo je $n = 2$.

T-5. *V rovnobežníku $ABCD$, v ktorom $|\measuredangle BAD| = 60°$, označme E priesečník uhlopriečok. Kružnica opísaná trojuholníku ACD pretína priamku BA v bode $K \neq A$, priamku BD v $P \neq D$ a priamku BC v $L \neq C$. Priamka EP pretína kružnicu opísanú trojuholníku CEL v bodoch E a M. Dokážte, že trojuholníky KLM a CAP sú zhodné.*
(*Slovinsko*)

Riešenie. Ak vezmeme bod F na polpriamke AB taký, že $|BC| = |BF| = |FC|$, dostaneme rovnoramenný lichobežník, ktorého opísaná kružnica je zároveň opísanou kružnicou trojuholníka ADC. Preto tento bod F bude zhodný s bodom K. Analogicky ak vezmeme bod G na polpriamke BC taký, že $|GB| = |GA| = |BA|$, zistíme, že bude zhodný s bodom L. Preto $|AC| = |KL|$, keďže sú symetrické podľa osi uhla CBK (alebo uhla ABL).



Obr. 2

Z tetivového štvoruholníka $APCD$ máme

$$|\measuredangle APC| = 180° - |\measuredangle ADC| = 180° - 120° = 60°.$$

Uvažujme zobrazenie $\mathcal{Z}$, ktoré vznikne zložením kružnicovej inverzie podľa kružnice so stredom B a polomerom $\sqrt{|BA| \cdot |BK|} = \sqrt{|BL| \cdot |BC|}$ a stredovej súmernosti so stredom B. V tomto zobrazení sa body K, L zobrazia postupne na A, C. Navyše z mocností bodu B máme $|BA| \cdot |BK| = |BD| \cdot |BP|$ a tiež $|BL| \cdot |BC| = |BE| \cdot |BM|$, čiže $\mathcal{Z}(D) = P$ a $\mathcal{Z}(E) = M$. Keďže obrazy bodov A, C, E sú K, L, M a z vlastností inverzie obraz každej priamky neprechádzajúcej cez B je kružnica prechádzajúca cez B, štvoruholník $BLMK$ je tetivový. Preto

$$|\measuredangle KML| = 180^\circ - |\measuredangle KBL| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Ďalej máme (obr. 2)

$$|\measuredangle LKM| = |\measuredangle LBM| = |\measuredangle DBC| = |\measuredangle ADP| = |\measuredangle ACP|.$$

Preto trojuholníky APC, LMK sú podobné a vzhľadom na fakt $|AC| = |LK|$ dokázaný v úvode musia byť zhodné.

T-6. *Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$, pričom $|CD| = |DA|$. Body E, F ležia postupne na stranách AB, BC, pričom $|\measuredangle ADC| = 2|\measuredangle EDF|$. Úsečky DK a DM sú postupne výškou a ťažnicou trojuholníka DEF. Bod L je obrazom bodu K v stredovej súmernosti podľa bodu M. Dokážte, že priamky DM a BL sú rovnobežné.* (Poľsko)

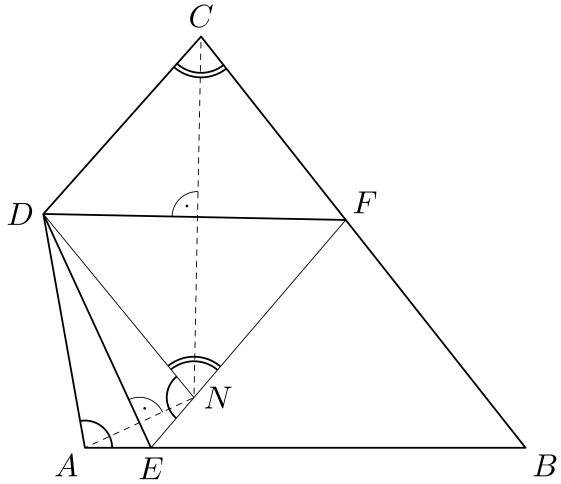
Riešenie. Ak N je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa DE, potom

$$|\measuredangle CDN| = |\measuredangle CDA| - |\measuredangle ADN| = 2|\measuredangle EDF| - 2|\measuredangle EDN| = 2|\measuredangle FDN|$$

a $|ND| = |AD| = |CD|$. Takže N je zároveň obrazom bodu C v osovej súmernosti podľa DF. Teda trojuholníky ADE a NDE sú zhodné, rovnako aj trojuholníky CDF a NDF. Preto

$$|\measuredangle END| + |\measuredangle DNF| = |\measuredangle EAD| + |\measuredangle DCF| = |\measuredangle BAD| + |\measuredangle DCB| = 180^\circ,$$

čiže N leží na úsečke EF (obr. 3).

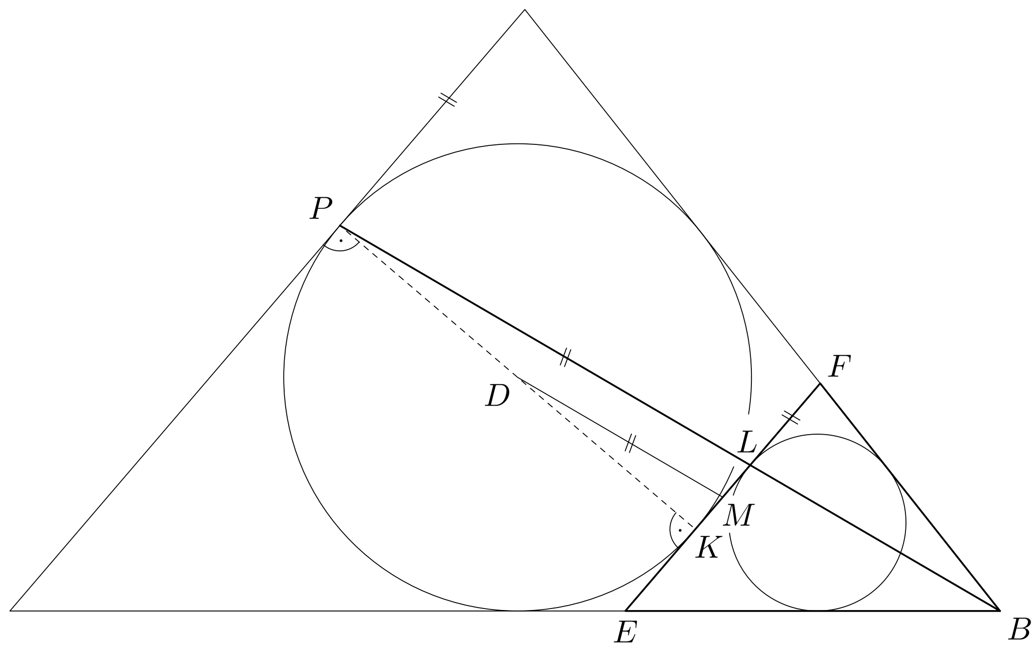


Obr. 3

Použime označenie $d(X, YZ)$ pre vzdialenosť bodu X od priamky YZ. Potom

$$d(D, BE) = d(D, AE) = d(D, NE) = d(D, FN) = d(D, FC) = d(D, FB),$$

pričom druhá a predposledná rovnosť sú dôsledkom spomenutých zhodností trojuholníkov. Všimnime si, že bod D leží v rovnakej vzdialenosti od troch priamok obsahujúcich strany trojuholníka BEF a je teda stredom pripísanej kružnice trojuholníka BEF. Preto pripísaná kružnica sa dotýka úsečky EF v bode K.



Obr. 4

Z vlastností vpísanej a pripísanej kružnice vyplýva, že vpísaná kružnica trojuholníka BEF sa dotýka úsečky EF v bode L (stačí si spomenúť na vyjadrenie dĺžok úsekov od vrcholov trojuholníka k dotykovým bodom vpísanej, resp. pripísanej kružnice). Nech P je obraz bodu K v stredovej súmernosti so stredom v bode D (obr. 4). Rovnoľahlosť so stredom v bode B, ktorá zobrazí vpísanú kružnicu trojuholníka BEF na jeho pripísanú kružnicu, zobrazí L na P, a teda body B, L, P ležia na jednej priamke. Teraz už dokazované tvrdenie vyplýva z rovnobežnosti DM a PL, ktorá je triviálnym dôsledkom rovnosti pomerov $|KL| : |KM| = |KP| : |DP| = 2$.

T-7. *Nájdite všetky dvojice celých čísel* (m, n)*, ktoré sú riešením rovnice*

$$(m + n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

(*Chorvátsko*)

Riešenie. Ak je dvojica (m, n) riešením, sú ním aj dvojice (n, m), $(-m, -n)$ a $(-n, -m)$. Pre $n = 0$ dostaneme rovnicu $m^4 = m^2$ s riešeniami $m \in \{-1, 0, 1\}$. Zo symetrickosti riešenia vyplýva, že riešením je päť dvojíc

$$(n, m) \in \{(0, -1), (-1, 0), (0, 0), (0, 1), (1, 0)\}.$$

Treba si uvedomiť, že ak by boli m aj n kladné, ľavá strana by bola rádovo väčšia ako pravá, čo dáva silné tušenie neexistencie takéhoto riešenia. Formálny dôkaz správnosti tohto tušenia môže vyzerať napríklad takto: Bez ujmy na všeobecnosti nech $0 < n \leqq m$, potom na základe rovnice platia aj nerovnosti

$$\begin{aligned}(m+1)^4 \leqq (m+n)^4 = m^2n^2 + (m+n)^2 + 4mn &\leqq m^4 + 8m^2,\\ 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 &\leqq 8m^2,\\ 2m^2(2m-1) &< 0.\end{aligned}$$

Pre ľubovoľné prirodzené číslo m je toto spor, preto riešením nie je žiadna dvojica kladných čísel. Navyše analogicky ani žiadna dvojica záporných čísel.

Preto bez ujmy na všeobecnosti nech $n = -k$ je záporné a $0 < k \leqq m$. Potom

$$\begin{aligned}(m-k)^4 &= m^2k^2 + m^2 + k^2 - 6mk,\\ m^4 - 4m^3k + 5m^2k^2 - 4mk^3 + k^4 &= m^2 - 6mk + k^2,\\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2) &= m^2 - 6mk + k^2,\\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2 - 1) &= -5mk\\ \text{a zároveň}\qquad (m^2 - mk + k^2 - 1)(m^2 - 3mk + k^2) &= -3mk.\end{aligned}$$

Odtiaľ

$$(m^2 - mk + k^2) \mid 5mk \qquad \text{a} \qquad (m^2 - 3mk + k^2) \mid 3mk.$$

Nech $\operatorname{nsd}(m,k) = d$ a $k = da$, $m = db$ (pričom $a, b > 0$), potom

$$(b^2 - ba + a^2) \mid 5ba \qquad \text{a} \qquad (b^2 - 3ba + a^2) \mid 3ba.$$

Ale

$$\operatorname{nsd}(b^2 - ba + a^2, b) = 1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{nsd}(b^2 - ba + a^2, a) = 1,$$

čo je ekvivalentné s $\operatorname{nsd}(b^2 - ba + a^2, ba) = 1$, preto

$$b^2 - ba + a^2 \in \{1, 5\}.$$

Ak $b^2 - ba + a^2 = 1$ a pozrieme sa na to ako na kvadratickú rovnicu s neznámou a, diskriminant $4 - 3b^2$ je štvorcom prirodzeného čísla len pre $b = 1$. Odtiaľ sa poľahky dopočítajú riešenia

$$(n, m) \in \{(2, -2), (-2, 2)\}.$$

Ak $b^2 - ba + a^2 = 5$, diskriminant $20 - 3b^2$ nie je štvorcom prirodzeného čísla nikdy. Celočíselným riešením rovnice je teda sedmica už spomenutých dvojíc.

Poznámka. Druhú „vetvu“ s výrazom $3mk$ na pravej strane sme v riešení nepotrebovali. Ak by sme ju použili v analogickom postupe, museli by sme pre výraz $b^2 - 3ba + a^2$ preverovať až štyri hodnoty ±1, ±3. Pri výraze $b^2 - ba + a^2$ sme hodnoty -1, -5 preverovať nemuseli, lebo $b^2 + a^2 \geqq 2ab$, t. j. $b^2 - ab + a^2 > 0$. Okrem toho, diskriminant by pre niektorú rovnicu $b^2 - 3ba + a^2 = \pm1$, resp. ±3, mohol byť štvorcom pre nekonečne veľa hodnôt b.

Inou možnosťou je skombinovať obe vetvy a riešiť sústavy $b^2 - ba + a^2 = p$, $b^2 - 3ba + a^2 = q$ pre $p \in \{1, 5\}$, $q \in \{\pm1, \pm3\}$. Tým sa možno vyhnúť úvahám o diskriminantoch, keďže každú zo sústav je ľahké v obore celých čísel vyriešiť (napr. po odčítaní rovníc priamo dostaneme hodnotu súčinu ab).

T-8. *Nájdite všetky riešenia rovnice*

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

v obore celých nezáporných čísel. (*Litva*)

Riešenie. Ľahko nahliadneme, že $x \geqq 2$ a $y + z \geqq 1$. Uvažujúc nad danou rovnicou v zvyškových triedach dostaneme $1 \equiv (-1)^y \pmod 4$, preto y musí byť párne. Podobne ak $y > 0$, tak $(-1)^x + 2 \equiv 0 \pmod 3$, čiže x je párne. Ak $z > 0$, máme $2^x - 1 \equiv 0 \pmod 5$, čo pre x znamená deliteľnosť štyrmi. Ale aspoň jedno z dvojice y, z je kladné, a teda x musí byť tak či onak párne. Nech $x = 2t$ a $y = 2u$. Potom

$$\begin{aligned} 2^x + 2009 &\equiv 2^x \in \{1, 2, 4\} \pmod 7, \\ 3^y 5^z &\equiv 9^u (-2)^z \in \{3, 5, 6\} \pmod 7 \quad \text{pre nepárne } z. \end{aligned}$$

Preto z je párne a $z = 2v$. Rovnicu teraz možno prepísať na tvar

$$2009 = (3^u 5^v - 2^t)(3^u 5^v + 2^t).$$

Existuje však len jedna dvojica čísel, ktorých súčin je 2009 a ich rozdiel je mocninou dvoch (t. j. 2^{t+1}): 41 a 49. Z toho už poľahky dopočítame jediné riešenie

$$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 2.$$