2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

---

1. *Určte všetky reálne čísla c, ktoré možno s oboma koreňmi kvadratickej rovnice*

$$x^2 + \frac{5}{2}x + c = 0$$

usporiadať do trojčlennej aritmetickej postupnosti. (Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

Riešenie. Predpokladajme, že číslo c má požadovanú vlastnosť. Diferenciu príslušnej aritmetickej postupnosti označme d. Rozoberieme dva prípady podľa toho, či číslo c leží medzi koreňmi x_1 a x_2 danej kvadratickej rovnice, alebo nie.

a) Ak je c prostredným členom predpokladanej aritmetickej postupnosti, platí $x_1 = c - d$ a $x_2 = c + d$. Pre súčet koreňov tak podľa Viètových vzťahov dostávame $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c$, odkiaľ $c = -\frac{5}{4}$. Navyše pre záporné c je diskriminant danej rovnice kladný, takže má dva reálne korene. (Pre $c = -\frac{5}{4}$ má daná rovnica korene $x_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{5}$.)

b) Ak je koeficient c krajným členom predpokladanej aritmetickej postupnosti, označme korene danej rovnice tak, aby platilo $x_1 = c + d$, $x_2 = c + 2d$. Pre ich súčet teraz vychádza $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c + 3d$. Ak z toho vyjadríme $d = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c$ a dosadíme do vzťahov $x_1 = c + d$ a $x_2 = c + 2d$, dostaneme $x_1 = \frac{1}{6}(2c - 5)$, $x_2 = -\frac{1}{3}(c + 5)$. Po dosadení oboch výrazov do Viètovho vzťahu $x_1x_2 = c$ obdržíme po úprave kvadratickú rovnicu $2c^2 + 23c - 25 = 0$, ktorá má korene 1 a $-\frac{25}{2}$. (Podmienku na diskriminant tentoraz overovať nemusíme, lebo uvedeným postupom máme zaručené, že reálne čísla $x_{1,2}$ zodpovedajúce obom nájdeným hodnotám c spĺňajú oba Viètove vzťahy, takže sú naozaj koreňmi príslušnej rovnice. Pre $c = 1$ má daná kvadratická rovnica korene $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -2$; pre $c = -\frac{25}{2}$ má rovnica korene $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{5}{2}$.)

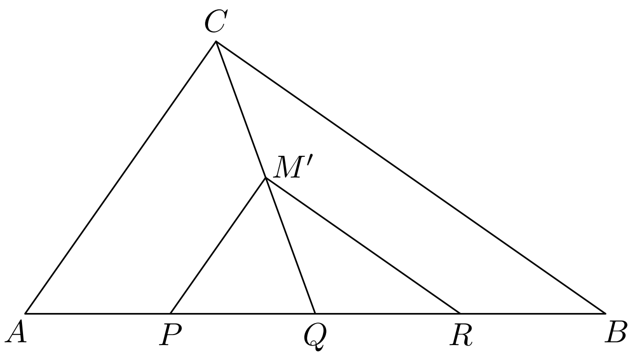
Záver. Úlohe vyhovujú reálne čísla c z množiny $\{-\frac{25}{2}; -\frac{5}{4}; 1\}$.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov. Za nájdenie každého z troch riešení úlohy dajte po 2 body. Body pritom nestrhávajte, ak súťažiaci neurčí pre nájdené hodnoty koeficientu c korene príslušnej kvadratickej rovnice, lebo to úloha nevyžaduje.

---

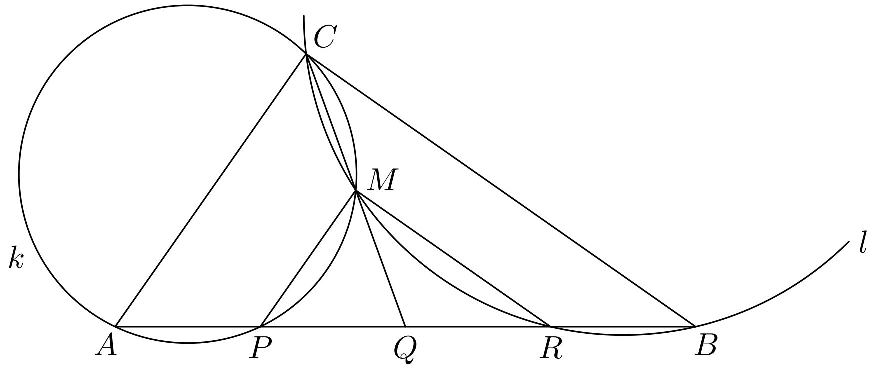
2. *Nech P, Q, R sú body prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|AP| = |PQ| = |QR| = |RB| = \frac{1}{4}|AB|$. Dokážte, že priesečník M kružníc opísaných trojuholníkom APC a BRC, ktorý je rôzny od bodu C, je totožný so stredom S úsečky CQ.* (Peter Novotný)

Riešenie. Označme M' stred úsečky CQ (obr. 1). Keďže PM' a RM' sú stredné priečky trojuholníkov AQC a BQC, ktoré sú podľa Tálesovej vety rovnoramenné so základňami AC a BC, sú štvoruholníky $CAPM'$ a $CBRM'$ rovnoramenné lichobežníky a im opísané kružnice, ktoré sa pretínajú v bodoch C a M', sú zároveň aj opísanými kružnicami uvažovaných trojuholníkov APC a BRC. Takže $M = M'$ a tvrdenie úlohy je tým dokázané.



Obr. 1

Iné riešenie. Označme c dĺžku prepony AB daného pravouhlého trojuholníka ABC. Kružnice opísané trojuholníkom APC a BRC označme postupne k, l (obr. 2). Vzhľadom na to, že $|QP| \cdot |QA| = |QR| \cdot |QB| = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$, má stred Q prepony AB rovnakú mocnosť $m = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$ k obom kružniciam k aj l, a leží preto na ich chordále CM. Navyše podľa Tálesovej vety platí $|QC| = |QA| = \frac{1}{2}c$. Z rovnosti $|QM| \cdot |QC| = m$ tak vyplýva $|QM| = \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}|QC|$, takže M je stredom úsečky CQ.



Obr. 2

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov. Za čiastočné pozorovania, ktoré vedú k riešeniu úlohy, dajte najviac 3 body.

---

3. *Dokážte, že pre ľubovoľné dve rôzne prvočísla p, q väčšie ako 2 platí nerovnosť*

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| > \frac{4}{\sqrt{pq}}.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Keďže p, q sú rôzne *nepárne* prvočísla, platí $|p-q| \geqq 2$. Pre ľavú stranu danej nerovnosti teda máme

$$L = \left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| = \left|\frac{p^2 - q^2}{pq}\right| = \frac{|p-q| \cdot (p+q)}{pq} \geqq \frac{2\,(p+q)}{pq}.$$

Aby sme dokázali požadovanú nerovnosť

$$L > \frac{4}{\sqrt{pq}},$$

stačí dokázať nerovnosť $p + q > 2\sqrt{pq}$. To je však nerovnosť, ktorá je triviálnym dôsledkom nerovnosti $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 > 0$, ktorá platí pre ľubovoľné dve rôzne kladné čísla p, q. Tým je daná nerovnosť dokázaná.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 1 bod za správnu úpravu výrazu na ľavej strane nerovnosti, ďalej 2 body za využitie podmienky $|p - q| \geqq 2$ a ďalšie 3 body za dokončenie dôkazu využitím uvedenej „ostrej“ nerovnosti či prípadnej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvojice rôznych kladných čísel p, q.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.