70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

<u>*Informácia pre krajskú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

---

1. *Pre tri neznáme prirodzené čísla platí, že*

- *najväčší spoločný deliteľ prvého a druhého je 8,*
- *najväčší spoločný deliteľ druhého a tretieho je 2,*
- *najväčší spoločný deliteľ prvého a tretieho je 6,*
- *najmenší spoločný násobok všetkých troch čísel je 1680,*
- *najväčšie z čísel je väčšie ako 100, ale nie je väčšie ako 200,*
- *jedno z čísel je štvrtou mocninou celého čísla.*

O ktoré čísla ide? Určte všetky možnosti. (*Eva Semerádová*)

Riešenie. Z prvých troch podmienok vyplýva, že prvé číslo je násobkom 24 (aby bolo deliteľné 8 a 6), druhé číslo je násobkom 8 a tretie číslo je násobkom 6. Keďže zmieňované delitele sú najväčšie možné, musia byť neznáme čísla tvaru

$$24a, \quad 8b, \quad 6c, \tag{1}$$

pričom a, b, c sú po dvoch nesúdeliteľné čísla.

Najmenší spoločný násobok takej trojice čísel je $24 \cdot a \cdot b \cdot c$, čo má podľa zadania byť rovné $1680 = 24 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Aby jedno z čísel bolo štvrtou mocninou celého čísla, musí to byť druhé, a to v prípade, že $b = 2$ (prvé aj tretie číslo je deliteľné tromi, ale najmenší spoločný násobok všetkých troch čísel nie je deliteľný $3^4 = 81$). Teda neznáme čísla sú tvaru

$$24a, \quad 16, \quad 6c, \tag{2}$$

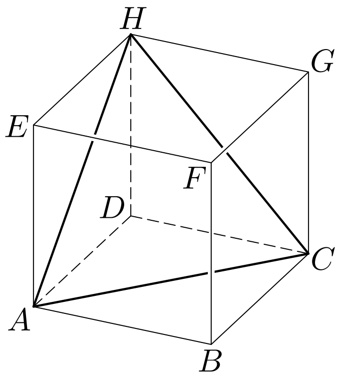
pričom čísla a, c sú 5, 7 alebo 1, 35 (v ľubovoľnom poradí).

Aby žiadne z čísel nebolo väčšie ako 200, nemôže byť ani a, ani c rovné 35. Ostávajú tak dve možnosti: buď $a = 5$ a $c = 7$, alebo $a = 7$ a $c = 5$. Oba prípady vyhovujú poslednej požadovanej podmienke, t. j. aby najväčšie z hľadaných čísel bolo väčšie ako 100. Neznáma trojica čísel je niektorá z nasledujúcich

$$120, \quad 16, \quad 42,$$
$$168, \quad 16, \quad 30.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za odvodenie (1); 2 body za rozklad čísla 1680 a odvodenie (2); 2 body za rozbor možností a výsledok.

2. *Trojuholník ACH je určený tromi vrcholmi kocky $ABCDEFGH$, pozri obrázok. Výška tohto trojuholníka na stranu CH má veľkosť 12 cm. Vypočítajte obsah trojuholníka ACH a veľkosť hrany danej kocky.* (Marie Krejčová)



Riešenie. Každá zo strán trojuholníka ACH je uhlopriečkou niektorej steny kocky. Steny kocky sú navzájom zhodné štvorce, teda trojuholník ACH je rovnostranný.

Vzťah medzi veľkosťami výšky v a strany b rovnostranného trojuholníka je $v = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Veľkosť strany trojuholníka ACH je teda

$$b = \frac{2 \cdot 12}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \doteq 13{,}9\,(\mathrm{cm}).$$

Obsah trojuholníka so stranou veľkosti b a zodpovedajúcou výškou v je $S = \frac{1}{2} b \cdot v$. Obsah trojuholníka ACH je teda

$$S = \frac{12 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3} \doteq 83{,}1\,(\mathrm{cm}^2).$$

Vzťah medzi veľkosťami strany a a uhlopriečky b štvorca je $b = a\sqrt{2}$. Veľkosť hrany kocky je teda

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6} \doteq 9{,}8\,(\mathrm{cm}).$$

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za rozpoznanie rovnostrannosti trojuholníka ACH, vyjadrenie b, S a a; 2 body podľa kvality komentára.

Poznámky. Vzťahy $v = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ a $b = a\sqrt{2}$ možno považovať za známe, dajú sa odvodiť pomocou Pytagorovej vety.

Podľa spôsobu vyjadrenia výrazov s odmocninami sa môžu drobne líšiť výsledky po zaokrúhľovaní. Také rozdiely nemajú vplyv na hodnotenie úlohy.

3. *Daná je postupnosť siedmich čísel a, b, c, d, e, f, g. Každé z čísel b, c, d, e, f je aritmetickým priemerom susedných dvoch čísel. Ukážte, že číslo d je aritmetickým priemerom čísel a a g.* (Karel Pazourek)

Riešenie. Ak je číslo b aritmetickým priemerom a a c, tak rozdiely $b-a$ a $c-b$ sú rovnaké:

$$b = \frac{a+c}{2},$$
$$b+b = a+c,$$
$$b-a = c-b.$$

Všetky úpravy sú ekvivalentné, teda platí aj opačné tvrdenie: ak sú rozdiely $b-a$ a $c-b$ rovnaké, tak je číslo b aritmetickým priemerom a a c.

Zo zadania vyplýva, že rozdiely dvojíc susedných čísel sú rovnaké:

$$b-a = c-b = d-c = e-d = f-e = g-f.$$

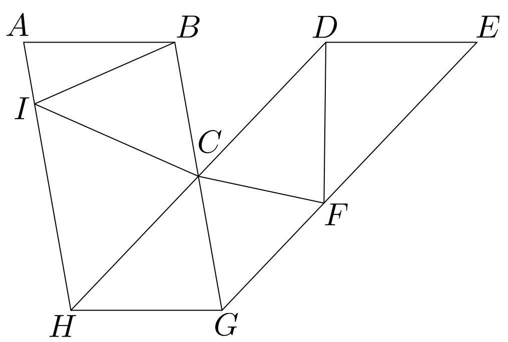
Rozdiely $d-a$ a $g-d$ sú preto tiež rovnaké (a sú rovné trojnásobku rozdielu susedných čísel). Číslo d je teda aritmetickým priemerom čísel a a g.

Návrh hodnotenia. 3 body za rozpoznanie vzťahu medzi aritmetickým priemerom a rozdielmi susedných čísel; 3 body za vlastné uplatnenie a kvalitu komentára.

Poznámky. Úlohu možno riešiť formálne manipuláciou so vzťahmi $b = \frac{a+c}{2}$, $c = \frac{b+d}{2}$ a pod. alebo aj názorne s číselnou osou. Také riešenie hodnoťte podľa úplnosti a kvality prevedenia.

Postupnosti s uvedenými vlastnosťami sa nazývajú aritmetické.

4. *Dané sú rovnobežníky $ABGH$ a $DEGH$, ktorých vrcholy A, B, D a E ležia na jednej priamke. Bod C je priesečníkom úsečiek BG a DH, bod I leží na úsečke AH a bod F leží na úsečke EG. Mnohouholník $ABCDEGH$ pozostáva zo siedmich trojuholníkov, pričom medzi trojuholníkmi ABI, BCI, CHI, DEF, CDF a CFG je jeden s obsahom $3\,cm^2$, jeden s obsahom $5\,cm^2$, dva s obsahom $7\,cm^2$ a jeden s obsahom $10\,cm^2$. Okrem trojuholníkov s obsahmi $7\,cm^2$ nemá žiadna ďalšia dvojica z uvedených siedmich trojuholníkov rovnaký obsah. Rozhodnite, či možno s istotou určiť trojuholníky s obsahmi $7\,cm^2$. Ďalej určte obsah mnohouholníka $ABCDEGH$; nájdite všetky možnosti.*
Poznámka: Obrázok je len ilustračný. (Eva Semerádová)



Riešenie. Rovnobežníky $ABGH$ a $DEGH$ majú spoločnú stranu a rovnakú výšku, majú teda rovnaký obsah. To znamená, že pre obsahy prislúchajúcich trojuholníkov platí

$$S_{ABI} + S_{BCI} + S_{CHI} + S_{CGH} = S_{DEF} + S_{CDF} + S_{CFG} + S_{CGH}. \tag{1}$$

Nezávisle od polohy bodu I na úsečke AH je obsah trojuholníka BCI stále rovnaký. Ak by bod I splynul s bodom A, tvoril by tento trojuholník spolu s trojuholníkom CGH polovicu rovnobežníka $ABGH$. Z podobného dôvodu tvoria aj trojuholníky CDF a CGH polovicu obsahu rovnobežníka $DEGH$. Celkom teda pre obsahy trojuholníkov platí

$$S_{BCI} + S_{CGH} = S_{ABI} + S_{CHI} = S_{DEF} + S_{CFG} = S_{CDF} + S_{CGH}. \tag{2}$$

Preto trojuholníky BCI a CDF majú rovnaký obsah, a to práve $7\,\mathrm{cm}^2$.

Tri zo štyroch trojuholníkov ABI, CHI, DEF a CFG majú obsahy $3\,\mathrm{cm}^2$, $5\,\mathrm{cm}^2$ a $10\,\mathrm{cm}^2$. Rozoberieme všetky možné súčty (2), z toho určíme obsah zvyšného trojuholníka z uvedenej štvorice, obsah trojuholníka CGH a obsah mnohouholníka $ABCDEGH$:

súčet (2)	$3+5=8$	$3+10=13$	$5+10=15$
obsah zvyšného	$8-10=-2$	$13-5=8$	$15-3=12$
obsah CGH	—	$13-7=6$	$15-7=8$
obsah celého	—	$14+26+6=46$	$14+30+8=52$

V oboch prípadoch je splnená podmienka, že okrem trojuholníkov s obsahmi $7\,\mathrm{cm}^2$ nemá žiadna ďalšia dvojica trojuholníkov rovnaký obsah. Mnohouholník $ABCDEGH$ má obsah buď $46\,\mathrm{cm}^2$, alebo $52\,\mathrm{cm}^2$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za odvodenie vzťahu (1); 2 body za vzťahy (2) a rozpoznanie trojuholníkov s obsahmi $7\,\mathrm{cm}^2$; 3 body za rozbor možností, overenie podmienok a určenie možných obsahov mnohouholníka $ABCDEGH$.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, L. Dedková, Monika Dillingerová, Karol Gajdoš, L. Hozová, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Erika Novotná

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021