2020/2021
70. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 21. – 24. 3. 2021.*)

1. Zlomok s 1010 políčkami v čitateli a 1011 políčkami v menovateli slúži ako hrací plán pre hru dvoch hráčov.

$$\frac{\square + \square + \ldots + \square}{\square + \square + \ldots + \square + \square}$$

Hráči sa striedajú v ťahoch. V každom ťahu hráč vyberie jedno z čísel 1, 2, ..., 2021 a vloží ho do ľubovoľného prázdneho políčka. Každé číslo pritom môže byť použité iba raz. Začínajúci hráč vyhráva, ak sa hodnota zlomku po zaplnení všetkých políčok líši od čísla 1 o menej ako 10^{-6}. V opačnom prípade vyhráva druhý hráč. Rozhodnite, ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu. (*Pavel Šalom*)

2. Označme I stred kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Ďalej označme M a N stredy úsečiek AB a BI. Dokážte, že priamka CI je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BMN. (*Patrik Bak, Josef Tkadlec*)

3. Navzájom rôzne nenulové reálne čísla a, b, c spĺňajú množinovú rovnosť

$$\{a+b, b+c, c+a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Dokážte, že platí aj rovnosť

$$\{a, b, c\} = \left\{a^2-2, b^2-2, c^2-2\right\}.$$

(*Josef Tkadlec*)

4. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí rovnosť

$$n + d(n) + d(d(n)) + \cdots = 2021,$$

pričom $d(0) = d(1) = 0$ a pre $k > 1$ je $d(k)$ superdeliteľ čísla k (t. j. jeho najväčší deliteľ d s vlastnosťou $d < k$). (*Tomáš Bárta*)

5. Reťazec znakov nazveme *úhľadným*, keď má párnu dĺžku a jeho prvá polovica je zhodná s druhou polovicou (napr. *abab*). Reťazec nazveme *pekným*, ak ho možno rozdeliť na niekoľko úhľadných reťazcov (ako *abcabcdedeff* na *abcabc*, *dede* a *ff*). *Redukciou* reťazca nazveme operáciu, pri ktorej z reťazca zotrieme dva rovnaké susedné znaky (napr. reťazec *abbac* možno zredukovať na *aac* a ten ďalej na *c*). Dokážte, že ľubovoľný reťazec obsahujúci každý svoj znak v párnom počte možno získať sériou redukcií z vhodného pekného reťazca. (*Martin Melicher*)

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Pre každý jeho vnútorný bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osových súmernostiach postupne podľa priamok BC, CA, AB. Dokážte, že všetky trojuholníky $X_aX_bX_c$ majú spoločný bod. (*Josef Tkadlec*)