2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Určte všetky trojice (a, b, c) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc*

$$a\sqrt{b} - c = a,$$
$$b\sqrt{c} - a = b,$$
$$c\sqrt{a} - b = c.$$

(*Michal Takács*)

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a = \max\{a, b, c\}$. Z prvej rovnice sústavy dostaneme

$$c\big(\sqrt{b} - 1\big) \leqq a\big(\sqrt{b} - 1\big) = c, \qquad \text{čiže} \qquad b \leqq 4.$$

Podobne máme z druhej rovnice sústavy

$$b\big(\sqrt{c} - 1\big) = a \geqq b, \qquad \text{teda} \qquad c \geqq 4.$$

Použitím týchto nerovností spolu s treťou rovnicou dostaneme

$$4 \leqq c \leqq c\big(\sqrt{c} - 1\big) \leqq c\big(\sqrt{a} - 1\big) = b \leqq 4,$$

odkiaľ vyplýva $a = b = c = 4$.

Odpoveď. Jediným riešením sústavy je trojica $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

2. *Uvažujme ľubovoľných 60 bodov v kruhu s polomerom 1. Dokážte, že na obvode kruhu existuje taký bod, že súčet jeho vzdialeností od všetkých 60 bodov nie je väčší ako 80.* (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Do kružnice ohraničujúcej kruh vpíšme rovnostranný trojuholník PQR. Ak dokážeme, že ľubovoľný bod X nachádzajúci sa v kruhu spĺňa

$$|PX| + |QX| + |RX| \leqq 4, \tag{1}$$

tak sčítaním nerovností (1) pre $X = X_k$, $1 \leqq k \leqq 60$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{60} |PX_k| + \sum_{k=1}^{60} |QX_k| + \sum_{k=1}^{60} |RX_k| \leqq 4 \cdot 60 = 240.$$

Z toho vyplýva, že aspoň jedna suma na ľavej strane je menšia alebo rovná $240 : 3 = 80$, teda aspoň jeden z bodov P, Q, R má požadovanú vlastnosť.

Vzhľadom na symetriu stačí (1) dokázať pre prípad, keď X leží vo výseku PSQ, kde S je stred kruhu. Ukážeme, že v takom prípade platí

$$|PX| + |QX| \leqq 2, \tag{2}$$

čo spolu s triviálnou nerovnosťou $|RX| \leqq 2$ dáva (1).

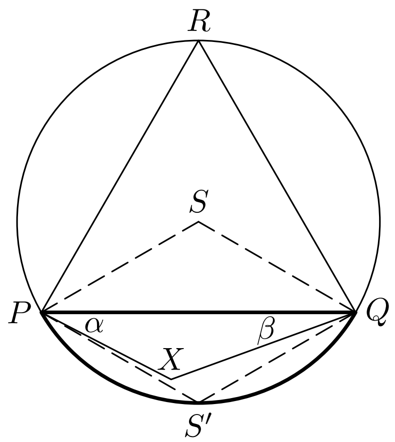
Označme S' stred kratšieho oblúka PQ (obr. 1). Štvoruholník $PS'QS$ je zrejme kosoštvorec, teda nerovnosť (2) stačí dokázať pre body X v odseku $PS'Q$ (ohraničenom úsečkou PQ a oblúkom $PS'Q$).

Ak $\alpha = |\measuredangle XPQ|$, $\beta = |\measuredangle XQP|$, tak $\alpha + \beta \leqq 60°$ a zo sínusovej vety v trojuholníku PQX máme

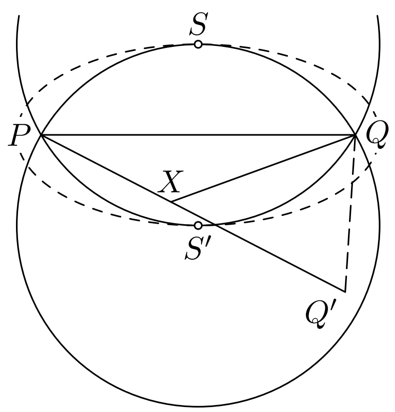
$$|PX| + |QX| = \frac{|PQ|(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \leqq \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2, \qquad \text{lebo} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} \leqq 30°.$$

Tým sme dokázali (2).[1]



Obr. 1



Obr. 2

Poznámka. V druhej časti riešenia možno postupovať aj takto: Pre ľubovoľný bod X v uvedenom odseku uvažujme taký bod Q' na polpriamke PX mimo úsečky PX, že $|XQ'| = |XQ|$. Keďže uhol QXQ' má nanajvýš $60°$, máme $|\measuredangle XQQ'| = |\measuredangle XQ'Q| \geqq$ $\geqq 60°$, takže Q' leží v kruhu, ktorý je obrazom zadaného kruhu v osovej súmernosti podľa PQ (obr. 2). Preto

$$|PX| + |XQ| = |PX| + |XQ'| = |PQ'| \leqq 2.$$

Ďalšou možnosťou je použiť fakt, že výsek PSQ leží v oblasti ohraničenej elipsou s ohniskami P a Q, ktorá je množinou všetkých bodov X spĺňajúcich $|PX| + |XQ| \leqq$ $\leqq |PS'| + |QS'| = |PS| + |QS| = 2$.

[1] Pre úplnosť treba dodať, že ak X leží na úsečke PQ, t. j. trojuholník PQX neexistuje a formálne nemôžeme použiť sínusovú vetu, tak $|PX| + |QX| = \sqrt{3} < 2$.

3. *Nech p je prvočíslo. Dokážte, že možno zvoliť p^3 políčok na šachovnici s rozmermi $p^2 \times p^2$ tak, že stredy žiadnych štyroch zvolených políčok nie sú vrcholmi obdĺžnika so stranami rovnobežnými s okrajmi šachovnice.* (Bartłomiej Bzdęga)

Riešenie. Označme p^2 riadkov šachovnice dvojicami (a, b), pričom $a, b \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$. Každý riadok tak bude označený inou dvojicou[2]. Podobne označme takýmito dvojicami aj všetkých p^2 stĺpcov.

Políčko ležiace v riadku (a, b) a v stĺpci (c, d) budeme nazývať *pekné* práve vtedy, keď

$$ac \equiv b + d \pmod{p}. \tag{1}$$

Ku každej dvojici (a, b) existuje zrejme práve p dvojíc (c, d) spĺňajúcich (1).[3] Takže v každom riadku je p pekných políčok a na celej šachovnici je ich p^3.

Stačí dokázať, že žiadne štyri pekné políčka nemajú vlastnosť opísanú v zadaní. Predpokladajme sporom, že štyri políčka ležiace na prieniku riadkov $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ so stĺpcami $(c_1, d_1) \neq (c_2, d_2)$ sú všetky pekné. Potom

$$a_i c_j \equiv b_i + d_j \pmod{p} \qquad \text{pre ľubovoľné } i, j \in \{1, 2\}. \tag{2}$$

Odčítaním dvoch kongruencií (2) s daným i (v jednej položíme $j = 2$, v druhej $j = 1$) získame

$$a_i(c_2 - c_1) \equiv d_2 - d_1 \pmod{p} \qquad \text{pre } i \in \{1, 2\}, \tag{3}$$

a po odčítaní dvoch kongruencií (3) dostaneme

$$(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preto $a_1 = a_2$ alebo $c_1 = c_2$. Vzhľadom na symetriu môžeme predpokladať, že $c_1 = c_2$. Potom z (3) vyplýva $d_1 = d_2$, a teda $(c_1, d_1) = (c_2, d_2)$, čo je spor.

4. *Nájdite najväčšie celé číslo k, pre ktoré je pravdivé nasledujúce tvrdenie: Daných je ľubovoľných 2010 nedegenerovaných trojuholníkov. V každom trojuholníku sú jeho strany ofarbené tak, že jedna je modrá, jedna je červená a jedna biela. Pre každú farbu osobitne usporiadame dĺžky strán. Dostaneme*

$$\begin{aligned} &b_1 \leqq b_2 \leqq \dots \leqq b_{2010} && \text{pre dĺžky modrých strán,}\\ &r_1 \leqq r_2 \leqq \dots \leqq r_{2010} && \text{pre dĺžky červených strán,}\\ &w_1 \leqq w_2 \leqq \dots \leqq w_{2010} && \text{pre dĺžky bielych strán.} \end{aligned}$$

Potom existuje aspoň k indexov j takých, že môžeme utvoriť nedegenerovaný trojuholník so stranami dĺžok b_j, r_j, w_j. (Michal Rolínek)

Riešenie. Dokážeme, že hľadaná najväčšia hodnota je $k = 1$.

[2] Napríklad môžeme označiť prvých p riadkov dvojicami tvaru $(0, 0)$, $(0, 1)$, …, $(0, p - 1)$, ďalších p riadkov $(1, 0)$, $(1, 1)$, …, $(1, p - 1)$, atď., až posledných p riadkov dvojicami $(p - 1, 0)$, $(p - 1, 1)$, …, $(p - 1, p - 1)$. V skutočnosti ale v našom riešení vôbec nezáleží na tom, v akom poradí riadky označíme.

[3] Ku každému c existuje práve jedno d spĺňajúce (1) a c môžeme zvoliť p spôsobmi.

Najskôr ukážeme, že b_{2010}, r_{2010}, w_{2010} sú vždy stranami trojuholníka. Bez ujmy na všeobecnosti nech $w_{2010} \geqq r_{2010} \geqq b_{2010}$. Stačí dokázať, že $b_{2010} + r_{2010} > w_{2010}$. Podľa zadania existuje trojuholník so stranami dĺžok w, b, r, ktoré majú postupne bielu, modrú a červenú farbu, pričom $w_{2010} = w$. Z trojuholníkovej nerovnosti máme $b + r > w$ a vzhľadom na zadané usporiadanie platí $b_{2010} \geqq b$ a $r_{2010} \geqq r$. Odtiaľ už priamo dostávame

$$b_{2010} + r_{2010} \geqq b + r > w = w_{2010}.$$

Ostáva zostrojiť postupnosť takých trojuholníkov, že w_j, b_j, r_j nie sú pre $j < 2010$ dĺžkami strán trojuholníka. Pre $j = 1, 2, \ldots, 2010$ nech trojuholník Δ_j má

- modrú stranu s dĺžkou $2j$,
- červenú stranu s dĺžkou j pre $j \leqq 2009$ a s dĺžkou 4020 pre $j = 2010$,
- bielu stranu s dĺžkou $j + 1$ pre $j \leqq 2008$, s dĺžkou 4020 pre $j = 2009$ a s dĺžkou 1 pre $j = 2010$.

Keďže

$$\begin{aligned} (j+1) + j > 2j &> (j+1) - j = 1 && \text{pre } j \leqq 2008,\\ 2j + j > 4020 &> 2j - j = j && \text{pre } j = 2009,\\ 4020 + 1 > 2j &> 4020 - 1 = 4019 && \text{pre } j = 2010, \end{aligned}$$

strany každého trojuholníka Δ_j spĺňajú trojuholníkové nerovnosti. Navyše $w_j = j$, $r_j = j$ a $b_j = 2j$ pre $1 \leqq j \leqq 2009$. Odtiaľ

$$w_j + r_j = j + j = 2j = b_j,$$

čiže w_j, b_j a r_j nie sú stranami trojuholníka pre žiadne $1 \leqq j \leqq 2009$.

---

5. *Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $x + y + z \geqq 6$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu*

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1}.$$

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice kladných čísel $x^2/14$, $x/(y^2 + z + 1)$ a $2(y^2 + z + 1)/49$ máme

$$\frac{1}{14}x^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{2}{49}(y^2 + z + 1) \geqq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{7^3}} = \frac{3}{7}x.$$

Cyklickou zámenou $x \to y \to z \to x$ odvodíme dve podobné nerovnosti. Sčítaním všetkých troch nerovností získame po úprave

$$L = \frac{11}{98}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1} + \frac{6}{49} \geqq \frac{19}{49}(x + y + z).$$

Z Cauchyho nerovnosti (alebo z jednoduchej úpravy na súčet troch štvorcov) vyplýva

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 \geqq 12.$$

Spolu dostávame

$$x^2+y^2+z^2+\frac{x}{y^2+z+1}+\frac{y}{z^2+x+1}+\frac{z}{x^2+y+1}=\frac{87}{98}(x^2+y^2+z^2)+L-\frac{6}{49}\geqq$$
$$\geqq\frac{87}{98}(x^2+y^2+z^2)+\frac{19}{49}(x+y+z)-\frac{6}{49}\geqq\frac{87}{98}\cdot 12+\frac{19}{49}\cdot 6-\frac{6}{49}=\frac{90}{7}.$$

Záver. Najmenšia možná hodnota daného výrazu je $90/7$. Nadobúda sa pre $x = y = z = 2$.

---

6. *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom*

$$|AB|+|CD|=\sqrt{2}\cdot|AC| \quad \text{a} \quad |BC|+|DA|=\sqrt{2}\cdot|BD|.$$

Dokážte, že $ABCD$ rovnobežník. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Zadané tvrdenie triviálne vyplýva z nasledujúceho poznatku:

Lema. Pre ľubovoľný štvoruholník $ABCD$ platí

$$(|AB|+|CD|)^2+(|BC|+|DA|)^2\geqq 2|AC|^2+2|BD|^2,$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $ABCD$ je rovnobežník.

Dôkaz. Označme $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{d}=\overrightarrow{DA}$. Ak umocníme na druhú trojuholníkové nerovnosti

$$|\vec{a}|+|\vec{c}|\geqq|\vec{a}-\vec{c}|, \qquad |\vec{b}|+|\vec{d}|\geqq|\vec{b}-\vec{d}|, \tag{1}$$

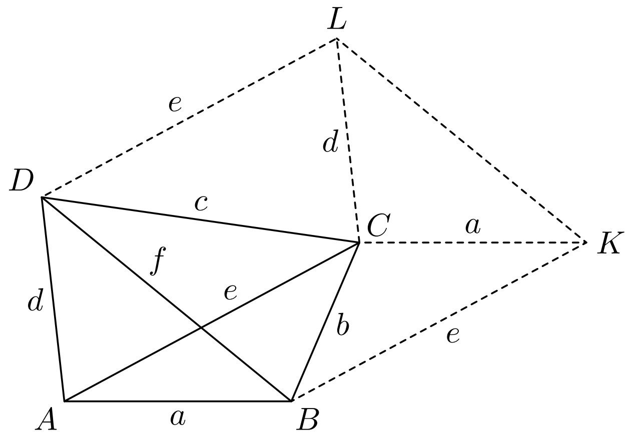
sčítame ich, a prepíšeme výrazy s použitím skalárneho súčinu, dostaneme

$$\begin{aligned}(|AB|+|CD|)^2+(|BC|+|DA|)^2 &\geqq |\vec{a}-\vec{c}|^2+|\vec{b}-\vec{d}|^2=\\ &=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{c}-2\,\vec{b}\cdot\vec{d}=\\ &=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{c}+\vec{d}|^2-2(\vec{a}+\vec{d})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\\ &=2|AC|^2-2\,\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BD}=2|AC|^2+2|BD|^2.\end{aligned}$$

Tým je nerovnosť dokázaná. Ak v nej platí rovnosť, musia rovnosti nastať aj v (1), čo je možné jedine v prípade, že $\vec{a}\parallel\vec{c}$ a $\vec{b}\parallel\vec{d}$. Teda obe dvojice protiľahlých strán štvoruholníka $ABCD$ sú rovnobežné, čo je možné jedine pre rovnobežník.

Naopak, ak $ABCD$ je rovnobežník, tak $|AB|=|CD|$, $|BC|=|DA|$ a dokazovaná nerovnosť za zmení na známu *rovnobežníkovú rovnosť* (jej dôkaz možno urobiť jednoducho tak, že v našom riešení nahradíme nerovnosti v (2) rovnosťami).

Iné riešenie. Odlišným spôsobom dokážeme lemu z prvého riešenia. Strany štvoruholníka $ABCD$ označme zvyčajným spôsobom. Ďalej nech $|AC|=e$, $|BD|=f$. Trojuholníky ABC, ADC doplňme na rovnobežníky $ABKC$, $ADLC$ (obr. 3).



Obr. 3

Úsečka AC je zhodná a rovnobežná s úsečkami BK a DL, takže $BKLD$ je rovnobežník a podľa rovnobežníkovej rovnosti máme

$$2e^2 + 2f^2 = 2|BK|^2 + 2|BD|^2 = |BL|^2 + |DK|^2.$$

Odtiaľ už s využitím trojuholníkových nerovností $|BL| \leqq b+d$, $|DK| \leqq a+c$ dostávame

$$2e^2 + 2f^2 \leqq (b+d)^2 + (a+c)^2.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď nastane v použitých trojuholníkových nerovnostiach, čiže vtedy, keď body B, C, L ležia na jednej priamke a zároveň body D, C, K ležia na jednej priamke, čo je zrejme splnené jedine vtedy, keď $ABCD$ je rovnobežník.

Poznámka. Podmienkam zadania vyhovujú (navzájom nepodobné) rovnobežníky $ABCD$ spĺňajúce

$$|AB| = 1, \quad |BC| = t \quad \text{a} \quad \cos|\measuredangle ABC| = \frac{t^2-1}{2t} \qquad (1 \leqq t \leqq 1+\sqrt{2}).$$