2009/2010
59. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

---

1. *Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť*

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (Symbol $\lfloor z \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako z.) (Francúzsko)

Riešenie. Dosadením $x = 0$ do zadanej rovnosti po úprave dostaneme

$$f(0) \cdot \big(1 - \lfloor f(y) \rfloor\big) = 0. \tag{1}$$

Rozoberieme dva prípady.

Ak $f(0) \neq 0$, tak podľa (1) máme $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ pre všetky $y \in \mathbb{R}$. Zadanú rovnosť tak môžeme prepísať na tvar

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \qquad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{R}$$

a po dosadení $y = 0$ získame $f(x) = f(0)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Funkcia f je teda konštantná a vzhľadom na $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ musí byť táto konštanta z intervalu $\langle 1, 2)$. Ľahko overíme, že všetky funkcie $f(x) = c$ pre $1 \leqq c < 2$ vyhovujú.

Predpokladajme ďalej, že $f(0) = 0$. Dosadením $x = a$, $y = a$, pričom $0 < a < 1$, dostaneme

$$0 = f(0) = f(\lfloor a \rfloor a) = f(a) \lfloor f(a) \rfloor.$$

Ak $f(a) \neq 0$, tak $\lfloor f(a) \rfloor = 0$, a po dosadení $x = 1$, $y = a$ do zadanej rovnosti máme $f(a) = f(1) \lfloor f(a) \rfloor = 0$, čo je spor. Takže $f(a) = 0$ pre všetky $0 \leqq a < 1$.

Nech z je ľubovoľné reálne číslo. Zrejme existuje celé číslo m také, že $0 \leqq z/m < 1$.[1] Dosadením $x = m$, $y = z/m$ do pôvodnej rovnosti s využitím predošlého poznatku dostaneme

$$f(z) = f\left(m \cdot \frac{z}{m}\right) = f\left(\lfloor m \rfloor \cdot \frac{z}{m}\right) = f(m) \cdot \left\lfloor f\left(\frac{z}{m}\right) \right\rfloor = 0 \qquad \text{pre všetky } z \in \mathbb{R}.$$

Teda $f(x) = 0$ a ľahko sa presvedčíme, že táto funkcia vyhovuje.

Záver. Vyhovujú iba konštantné funkcie $f(x) = c$, pričom $c = 0$ alebo $c \in \langle 1, 2)$.

---

[1] Stačí m zvoliť s rovnakým znamienkom ako z a v absolútnej hodnote väčšie ako z.

2. *Označme I stred vpísanej kružnice a Γ opísanú kružnicu trojuholníka ABC. Priamka AI pretína kružnicu Γ v bode D ($D \neq A$). Nech E je bod na oblúku BDC a F bod na strane BC, pričom*

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CAE| < \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC|.$$

Označme G stred úsečky IF. Dokážte, že priamky DG a EI sa pretínajú na kružnici Γ.
(Hongkong)

Riešenie. Priesečník priamky AF a kružnice Γ (rôzny od A) označme K, priesečník priamok AI a BC označme L. Podľa zadania $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAE|$, teda tetivy BK, CE kružnice Γ majú rovnakú dĺžku a $BC \parallel KE$.

Nech T je priesečník priamok DG a AF. Podľa Menelaovej vety pre trojuholník AFI a priamku DG máme

$$\frac{|AT|}{|TF|} \cdot \frac{|FG|}{|GI|} \cdot \frac{|ID|}{|DA|} = 1,$$

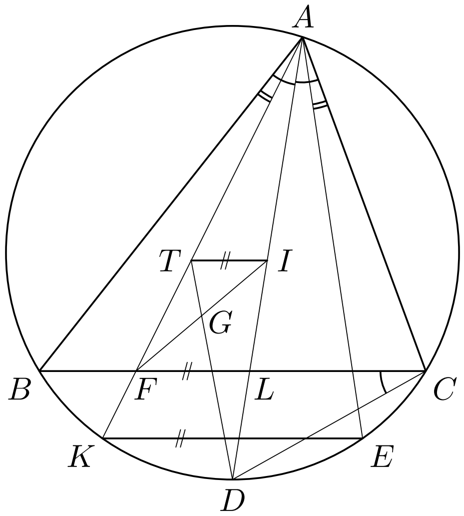
z čoho vzhľadom na $|FG| = |GI|$ po úprave dostávame

$$\frac{|AT|}{|TF|} = \frac{|DA|}{|ID|}. \tag{1}$$

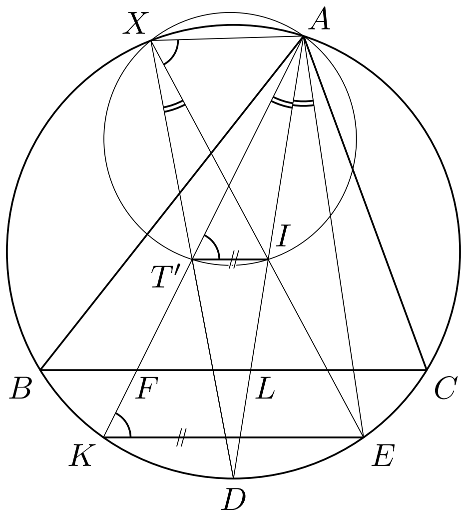
Keďže CI je osou uhla trojuholníka ALC, delí jeho stranu AL v pomere $|AI| : |IL| = |CA| : |LC|$. Trojuholníky ADC a CDL sú podobné, lebo pri vrchole D majú spoločný uhol a z obvodových uhlov $|\sphericalangle DCL| = |\sphericalangle DAB| = \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DAC|$. Takže $|CA| : |LC| = |DA| : |DC|$. Je známe, že $|DC| = |ID|$.[2] S využitím (1) máme

$$\frac{|AI|}{|IL|} = \frac{|CA|}{|LC|} = \frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DA|}{|ID|} = \frac{|AT|}{|TF|},$$

teda $TI \parallel FL$. Odtiaľ spolu s poznatkom z úvodu dostávame $TI \parallel KE$ (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

[2] Ľahko možno odvodiť, že trojuholník CID má pri vrchole C aj pri vrchole I vnútorný uhol veľkosti $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$, čiže je rovnoramenný.

Priesečník priamky EI s kružnicou Γ (rôzny od E) označme X a priesečník priamok DX a AF označme T'. Keďže AD je osou uhla BAC a uhly BAF, CAE majú podľa zadania rovnakú veľkosť, tak aj $|\measuredangle KAD| = |\measuredangle DAE|$. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou DE máme $|\measuredangle DAE| = |\measuredangle DXE|$. Takže

$$|\measuredangle T'AI| = |\measuredangle KAD| = |\measuredangle DAE| = |\measuredangle DXE| = |\measuredangle T'XI|$$

a body T', I, A, X ležia na jednej kružnici. Z obvodových uhlov nad tetivami IA a EA potom

$$|\measuredangle AT'I| = |\measuredangle AXI| = |\measuredangle AXE| = |\measuredangle AKE|,$$

odkiaľ $T'I \parallel KE$ (obr. 2).

Rovnobežka s priamkou KE prechádzajúca bodom I však môže pretínať priamku AF iba v jednom bode. Preto $T = T'$, priamka DG je totožná s DT' a bod X leží na priamkach DG, EI aj na kružnici Γ, čím je úloha vyriešená.

---

3. *Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých kladných celých čísel. Určte všetky funkcie $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že*

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

je štvorcom celého čísla pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$. (*USA*)

Riešenie. Všetky funkcie tvaru $g(n) = n+c$, pričom c je nezáporné celé číslo, vyhovujú, keďže vtedy $(g(m)+n)(m+g(n)) = (m+n+c)^2$. Dokážeme, že žiadne iné nevyhovujú. Použijeme pri tom nasledujúce tvrdenie:

Lema. Ak p je prvočíslo, k, l sú prirodzené čísla a $p \mid g(k) - g(l)$, tak $p \mid k - l$.

Dôkaz. Najskôr predpokladajme, že $p^2 \mid g(k) - g(l)$. Potom $g(l) = g(k) + p^2 a$ pre nejaké celé číslo a. Zoberme dostatočne veľké prirodzené číslo d (také, že $pd > \max\{g(k), g(l)\}$), ktoré nie je násobkom p, a položme $n = pd - g(k)$. Čísla

$$n + g(k) = pd \qquad \text{a} \qquad n + g(l) = pd + (g(l) - g(k)) = p(d + pa)$$

sú obe násobkom p, ale nie sú deliteľné p^2. Podľa zadania sú $(g(k) + n)(g(n) + k)$ aj $(g(l) + n)(g(n) + l)$ štvorce, a keďže sú to násobky p, musia byť deliteľné číslom p^2. Z toho vyplýva, že oba činitele $g(n) + k$, $g(n) + l$ musia byť násobkami p, čiže

$$p \mid (g(n) + k) - (g(n) + l) = k - l.$$

Ostáva prípad, že $p \mid g(k) - g(l)$ a súčasne $p^2 \nmid g(k) - g(l)$. Zoberme rovnaké d a položme $n = p^3 d - g(k)$. Potom je $g(k) + n = p^3 d$ deliteľné číslom p^3 (nie však p^4) a $g(l) + n = p^3 d + (g(l) - g(k))$ je deliteľné číslom p (nie však p^2). Analogicky preto dostávame, že čísla $g(n) + k$, $g(n) + l$ musia byť násobkami p a $p \mid k - l$.

Vráťme sa k zadanej úlohe. Predpokladajme, že $g(k) = g(l)$ pre nejaké $k, l \in \mathbb{N}$. Podľa lemy je potom $k - l$ deliteľné každým prvočíslom, čo je možné jedine v prípade $k = l$. Funkcia g je teda prostá.

Pozrime sa teraz na čísla $g(k)$ a $g(k+1)$. Keďže číslo $(k+1) - k = 1$ nie je deliteľné žiadnym prvočíslom, podľa lemy ich nemôže mať ani číslo $g(k + 1) - g(k)$, čiže

$$|g(k + 1) - g(k)| = 1.$$

Označme $g(2) - g(1) = q \in \{-1, 1\}$. Dokážeme matematickou indukciou, že $g(n) = g(1) + (n-1)q$. Pre $n = 1, 2$ to platí triviálne. S využitím indukčného predpokladu potom pre $n > 1$ máme

$$g(n+1) = g(n) \pm q = g(1) + (n-1)q \pm q = \begin{cases} g(1) + nq \\ \text{alebo} \\ g(1) + (n-2)q. \end{cases}$$

Keďže $g(n+1) \neq g(n-1) = g(1) + (n-2)q$, jedinou možnosťou je $g(n+1) = g(1) + nq$ a indukcia je hotová.

Máme teda $g(n) = g(1) + (n-1)q$. Určite však $q \neq 1$, lebo inak by sme pre $n \geqq g(1) + 1$ dostali $g(n) \leqq 0$, čo nie je možné. Takže $q = 1$ a $g(n) = g(1) + n - 1 = n + c$, pričom $c = g(1) - 1 \geqq 0$.

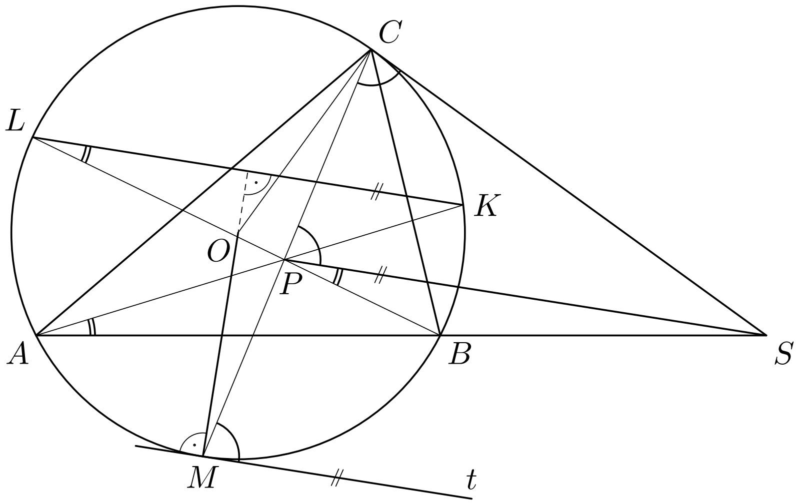
---

4. *Nech P je vnútorný bod trojuholníka ABC. Priamky AP, BP, CP pretínajú kružnicu Γ opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch K, L, M (rôznych od A, B, C). Dotyčnica ku kružnici Γ v bode C pretína priamku AB v bode S. Predpokladajme, že $|SC| = |SP|$. Dokážte, že $|MK| = |ML|$.* (Poľsko)

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti nech bod S leží na polpriamke AB. Z mocnosti bodu S ku kružnici Γ vyplýva $|SB| \cdot |SA| = |SC|^2 = |SP|^2$, odkiaľ $|SB| : |SP| = |SP| : |SA|$. Trojuholníky SBP, SPA sú teda podobné (uhol pri vrchole S majú spoločný a dvojice strán zvierajúce tento uhol majú dĺžky v rovnakom pomere). Z tejto podobnosti a z vlastností obvodových uhlov nad tetivou BK máme spolu[3]

$$|\measuredangle SPB| = |\measuredangle SAP| = |\measuredangle BAK| = |\measuredangle BLK|,$$

čiže zo súhlasných uhlov $LK \parallel PS$.



Obr. 3

[3] Rovnosť $|\measuredangle SPB| = |\measuredangle SAP|$ možno zdôvodniť aj takto: Keďže $|SB| \cdot |SA| = |SP|^2$, z mocnosti bodu S ku kružnici opísanej trojuholníku ABP vyplýva, že SP je dotyčnicou tejto kružnice. Uhly SPB a SAP sú úsekový a obvodový uhol prislúchajúce k tetive BP tejto kružnice, takže majú rovnakú veľkosť.

Označme O stred kružnice Γ. Dotyčnice t a CS kružnice Γ vedené krajnými bodmi tetivy MC zrejme zvierajú s MC uhly rovnakých veľkostí[4] (obr. 3). Takú istú veľkosť má však aj uhol CPS, lebo trojuholník CPS je podľa zadania rovnoramenný. Zo súhlasných uhlov tak dostávame $PS \parallel t$. Spolu máme

$$LK \parallel PS \parallel t \perp OM.$$

Tetiva LK je teda kolmá na polomer OM kružnice Γ, z čoho už priamo vyplýva $|ML| = |MK|$.

---

5. *V každej zo šiestich truhlíc B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 je na začiatku jedna minca. Dovolené sú dva typy operácií:*

Typ 1: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_j pre nejaké $1 \leqq j \leqq 5$. Odoberieme jednu mincu z B_j a pridáme dve mince do B_{j+1}.

Typ 2: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_k pre nejaké $1 \leqq k \leqq 4$. Odoberieme jednu mincu z B_k a vymeníme navzájom obsah truhlíc B_{k+1} a B_{k+2} (ktoré môžu byť aj prázdne).

Zistite, či existuje konečná postupnosť operácií taká, že po jej vykonaní budú truhlice B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 prázdne a truhlica B_6 bude obsahovať presne $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Platí $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.) (*Holandsko*)

Riešenie. Odpoveď na otázku zo zadania je „Áno“. Ukážeme, ako postupovať, aby sme dosiahli v truhliciach požadovaný počet mincí. Pre jednoduchosť budeme každú konkrétnu situáciu, koľko sa práve nachádza mincí v jednotlivých truhliciach, označovať šesticou čísel, pričom prvé číslo bude označovať počet mincí v prvej truhlici, druhé číslo počet mincí v druhej truhlici, atď.

Na začiatku teda máme šesticu $(1,1,1,1,1,1)$ (v každej truhlici je jedna minca). Postupnosťou dovolených operácií chceme dosiahnuť šesticu $(0,0,0,0,0,2010^{2010^{2010}})$. Vysvetlime najskôr lepšie, čo presne robia s mincami dovolené operácie. Pri prvom type vyberieme z truhlice jednu mincu, tú „rozdvojíme“ a dve vzniknuté mince dáme do truhlice napravo. Pri druhom type vyberieme z truhlice jednu mincu, tú „zahodíme“ a vymeníme obsah dvoch truhlíc nachádzajúcich sa hneď napravo od truhlice, z ktorej sme mincu zahodili.

Postupovať môžeme napríklad nasledovne. Najskôr použijeme prvý typ na 5. truhlicu (teda v 5. truhlici ubudne jedna minca a do 6. dve pribudnú):

$$(1,1,1,1,1,1) \quad \to \quad (1,1,1,1,0,3).$$

Teraz použijeme druhý typ na 4. truhlicu, teda odoberieme mincu zo 4. truhlice a vymeníme mince medzi 5. a 6. truhlicou:

$$(1,1,1,1,0,3) \quad \to \quad (1,1,1,0,3,0).$$

To isté teraz zopakujeme postupne pre 3., 2. a 1. truhlicu (uberieme mincu a vymeníme obsah truhlíc napravo). Dostaneme

$$(1,1,1,0,3,0) \ \to \ (1,1,0,3,0,0) \ \to \ (1,0,3,0,0,0) \ \to \ (0,3,0,0,0,0).$$

[4] Sú doplnkami do 90° k uhlom pri základni rovnoramenného trojuholníka MCO.

Zatiaľ to možno vyzerá beznádejne. Namiesto šiestich mincí, ktoré sme mali dohromady na začiatku, už máme len tri mince. Nevyzerá to tak, že by sa malo dať dosiahnuť „obrovské“ číslo $2010^{2010^{2010}}$. Teraz to však začne byť zaujímavé! Vykonáme nasledovné operácie (nechávame na čitateľa, aby skontroloval, že sú to povolené operácie):

$$\begin{gathered}(0,3,0,0,0,0) \to (0,2,2,0,0,0) \to (0,2,1,2,0,0) \to (0,2,0,4,0,0) \to \\ (0,1,4,0,0,0) \to (0,1,3,2,0,0) \to (0,1,3,1,2,0) \to (0,1,3,0,4,0) \to \\ (0,1,2,4,0,0) \to (0,1,2,3,2,0) \to (0,1,2,2,4,0) \to (0,1,2,1,6,0) \to \\ (0,1,2,0,8,0) \to (0,1,1,8,0,0) \to (0,1,1,7,2,0) \to (0,1,1,6,4,0) \to \\ (0,1,1,5,6,0) \to (0,1,1,4,8,0) \to (0,1,1,3,10,0) \to (0,1,1,2,12,0) \to \\ (0,1,1,1,14,0) \to (0,1,1,0,16,0) \to (0,1,0,16,0,0) \to (0,0,16,0,0,0).\end{gathered}$$

Podarilo sa nám teda trojku zväčšiť na číslo 16. Všimnime si pritom postupnosť šestíc od 5. po 23. Zo šestice $(0,1,4,0,0,0)$ sme dostali šesticu $(0,1,0,16,0,0)$ a pritom sme vôbec nezasahovali do prvej, druhej ani šiestej truhlice (vôbec sa v nich nemenili počty mincí). Dostali sme tak vlastne z trojice $(4,0,0)$ trojicu $(0,16,0) = (0,2^4,0)$. Takéto niečo možno urobiť vo všeobecnosti: Ak a je kladné celé číslo, tak z trojice $(a,0,0)$ (teda z troch po sebe idúcich truhlíc bez zasahovania do ostatných truhlíc) vieme vyrobiť trojicu $(0,2^a,0)$, a to nasledovnými krokmi (postupnosť operácií, keď iba všetky mince z jednej truhlice pomocou prvého typu operácie „zdvojnásobíme“ do susednej truhlice napravo, zapíšeme v jednom kroku, ktorý znázorníme znakom „$\Rightarrow$“):

$$\begin{gathered}(a,0,0) \to (a-1,2,0) \Rightarrow (a-1,0,4) \to (a-2,4,0) \Rightarrow (a-2,0,8) \to (a-3,8,0) \Rightarrow \\ (a-3,0,16) \to (a-4,16,0) \Rightarrow (a-4,0,32) \to (a-5,32,0) \Rightarrow \quad \dots \text{ atď} \dots \quad \to \\ (a-(a-1),2^{a-1},0) \Rightarrow (a-(a-1),0,2^a) \to (a-a,2^a,0) = (0,2^a,0).\end{gathered}$$

Vráťme sa k šestici $(0,0,16,0,0,0)$, ktorú sme naposledy dostali. Budeme pokračovať ďalej, pričom postupnosť krokov, keď z nejakej trojice $(a,0,0)$ vyrobíme trojicu $(0,2^a,0)$ (ukázali sme pred chvíľou, že také niečo je naozaj možné) budeme skrátene označovať „$\Rrightarrow$“:

$$\begin{gathered}(0,0,16,0,0,0) \to (0,0,15,2,0,0) \Rrightarrow (0,0,15,0,2^2,0) \to (0,0,14,2^2,0,0) \Rrightarrow \\ (0,0,14,0,2^{2^2},0) \to (0,0,13,2^{2^2},0,0) \Rrightarrow (0,0,13,0,2^{2^{2^2}},0) \to (0,0,12,2^{2^{2^2}},0,0) \Rrightarrow \\ \dots \text{ atď} \dots \\ \to (0,0,0,2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}}}}}}}}}},0,0).\end{gathered}$$

Vo štvrtej truhlici už máme obrovské číslo, ktoré pre zjednodušenie ďalšieho zápisu označme P_{16}. Toto číslo (teda číslo, ktoré dostaneme tak, že dvojku umocníme na druhú, výsledok dáme do exponentu dvojky, výsledok takého umocnenia dáme opäť do exponentu dvojky, atď.) je už väčšie ako číslo $2010^{2010^{2010}}$ zo zadania. Naozaj, keby sme si postupne písali výsledky takého umocňovania, dostali by sme

$$P_1 = 2, \qquad P_2 = 2^2 = 4, \qquad P_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16, \qquad P_4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65\,536,$$

a už nasledujúce číslo $P_5 = 2^{65\,536}$ má 19 729 cifier. Veľa cifier však má aj číslo $2010^{2010^{2010}}$, ktoré pre zjednodušenie označme A. Takže dokázať, že P_{16} je väčšie ako A, musíme inak. Formálny dôkaz môže vyzerať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
A = 2010^{2010^{2010}} &< 2048^{2010^{2010}} = (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11\cdot 2010^{2010}} < 2^{2010\cdot 2010^{2010}} = \\
&= 2^{2010^{2011}} < 2^{2048^{2011}} = 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11\cdot 2011}} = 2^{2^{22\,121}} < 2^{2^{32\,768}} = \\
&= 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{16}}} = 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} = P_6 < P_{16}.
\end{aligned}
$$

Všetky nerovnosti, ktoré sme napísali, sú zrejmé (a s veľkou rezervou). Ostáva už len dokončiť postup zo šestice $(0, 0, 0, P_{16}, 0, 0)$ na šesticu $(0, 0, 0, 0, 0, A)$. Na to stačí veľa krát použiť operáciu druhého typu na štvrtú truhlicu, pričom stále budeme „vymieňať“ obsahy prázdnej piatej a šiestej truhlice, takže sa okrem znižovania počtu mincí vo štvrtej truhlici nebude diať nič. Budeme to robiť až do momentu, keď dostaneme šesticu $(0, 0, 0, A/4, 0, 0)$ (zrejme číslo A je deliteľné štyrmi a $A/4 < A < P_{16}$, takže naozaj vieme dostať takúto šesticu). Napokon už len použijeme opakovane operáciu prvého typu najskôr na štvrtú truhlicu a potom na piatu truhlicu, až získame

$$(0, 0, 0, A/4, 0, 0) \quad\Rightarrow\quad (0, 0, 0, 0, A/2, 0) \quad\Rightarrow\quad (0, 0, 0, 0, 0, A).$$

Tým je úloha vyriešená.

---

6. *Nech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je postupnosť kladných reálnych čísel. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo s také, že pre všetky $n > s$ platí*

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k}\ ;\ 1 \leqq k \leqq n-1\}.$$

Dokážte, že existujú kladné celé čísla l a N také, že $l \leqq s$ a pre všetky $n \geqq N$ platí $a_n = a_l + a_{n-l}$. (Irán)

Riešenie. (Podľa *Martina Vodičku.*) Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie.

Lema. Každý člen postupnosti a_n je pre $n > s$ rovný súčtu $a_i + a_j$ pre nejaké i, j, pričom $i \leqq s$, $i + j = n$.

Dôkaz. Podľa zadania je a_n súčtom $a_{i_1} + a_{j_1}$ pre nejaké i_1, j_1, pričom $i_1 + j_1 = n$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $i_1 \leqq j_1$. Ak $i_1 \leqq s$, môžeme priamo položiť $i = i_1$, $j = j_1$. Ak $i_1 > s$, tak podľa zadania $a_{i_1} = a_{i_2} + a_{j_2}$, pričom $i_2 + j_2 = i_1$, čiže $i_2 < i_1$. Navyše zrejme $a_{j_2+j_1} \geqq a_{j_2} + a_{j_1}$. Spolu máme

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_2} + a_{j_2} + a_{j_1} \leqq a_{i_2} + a_{j_2+j_1},$$

ale keďže $n = i_2 + (j_2 + j_1)$, platí $a_n \geqq a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$, teda nutne $a_n = a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$. Ak $i_2 \leqq s$, položíme $i = i_2$, $j = j_2 + j_1$. V opačnom prípade môžeme celú úvahu zopakovať a nájsť $i_3 < i_2$ také, že $a_n = a_{i_3} + a_{j_3+j_2+j_1}$, atď. Keďže proces „zmenšovania“ nemôže prebiehať donekonečna, nájdeme takto index $i = i_r \leqq s$ taký, že $a_n = a_{i_r} + a_{j_r+\cdots+j_1}$. Tým je lema dokázaná.

Je jasné, že

$$\text{ak}\quad j > s,\ i_1, \ldots, i_r \leqq s,\ n = j + i_1 + \cdots + i_r, \quad\text{tak}\quad a_n \geqq a_j + a_{i_1} + \cdots + a_{i_r}, \quad (1)$$

lebo

$$\begin{aligned} a_j + a_{i_1} &\leqq a_{j+i_1}, \\ a_{j+i_1} + a_{i_2} &\leqq a_{j+i_1+i_2}, \\ &\vdots \\ a_{j+i_1+\dots+i_{r-1}} + a_{i_r} &\leqq a_{j+i_1+\dots+i_r} = a_n. \end{aligned}$$

Zapíšme číslo a_n (pre $n > s$) s opakovaným využitím úvodnej lemy v tvare

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{j_2} = \ldots = a_{i_1} + \cdots + a_{i_r} + a_{j_r}, \tag{2}$$

pričom $i_1, \ldots , i_r \leqq s$, $j_r > s$ a a_{j_r} už sa dá rozložiť na súčet dvoch členov postupnosti s oboma indexmi menšími alebo rovnými s. (S rozkladaním na súčet teda skončíme o práve jeden krok skôr, ako dostaneme všetky indexy menšie alebo rovné s. Pripúšťame aj možnosť $r = 0$, vtedy $j_r = n$ a znamená to, že už pre prvý rozklad $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$ by sme mali $i_1, j_1 \leqq s$.)

Zoberme teraz taký index $i \in \{1, \ldots , s\}$, pre ktorý je hodnota a_i/i maximálna (ak je takých viac, zoberieme ľubovoľný z nich) a označme ho l. Ak sa v súčte (2) medzi hodnotami $\{i_1, \ldots , i_r\}$ nachádza nejaký index i aspoň l-krát, nahradíme l jeho výskytov i výskytmi indexu l. Dostaneme tak množinu indexov $\{i'_1, \ldots , i'_{r'}\}$, pričom zrejme $i'_1 + \cdots + i'_{r'} = i_1 + \cdots + i_r$. Keďže $a_l/l \geqq a_i/i$, máme $i \cdot a_l \geqq l \cdot a_i$. Takže

$$a_n = a_{i_1} + \cdots + a_{i_r} + a_{j_r} \leqq a_{i'_1} + \cdots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}.$$

Podľa (1) však platí aj opačná nerovnosť, nutne teda musí nastať rovnosť, čiže

$$a_n = a_{i'_1} + \cdots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

pričom aspoň jeden spomedzi indexov $i'_1, \ldots, i'_{r'}$ je rovný l.

Samozrejme, pre dostatočne veľké n sa v súčte (2) nejaký index musí nachádzať aspoň l-krát; stačí zobrať napríklad $n > s^2(l - 1) + 2s = N$.[5] Takže pre $n > N$ vieme a_n zapísať v tvare (po preusporiadaní indexov)

$$a_n = a_l + a_{i'_2} + \cdots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}. \tag{3}$$

Podľa (1) (ak n nahradíme hodnotou $n - l$) však máme

$$a_{n-l} \geqq a_{i'_2} + \cdots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

odkiaľ spolu s (3) vyplýva $a_n \leqq a_l + a_{n-l}$. Zo zadania platí triviálne $a_n \geqq a_l + a_{n-l}$, takže musí byť $a_n = a_l + a_{n-l}$.

[5] Rôznych indexov je len s, zároveň $j_r \leqq 2s$, a ak by aj bolo všetkých po $l - 1$, mali by sme $n = i_1 + \cdots + i_r + j_r \leqq (1 + 2 + \cdots + s)(l - 1) + 2s \leqq s^2(l - 1) + 2s < n$, čo je spor.