70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

1. *Králiky Pečienka, Fašírka, Rezeň a Guláš súťažili v skoku do diaľky. Pečienka skočila o 15 cm ďalej ako Fašírka, ktorá skočila o 2 dm menej ako Guláš. Rezeň skočil 2 730 mm, teda o 1 m a 1 dm ďalej ako Pečienka. Určte poradie a dĺžky skokov všetkých králikov.*
(*Svetlana Bednářová*)

Nápad. Kam doskočila Pečienka?

Riešenie. Priamo zo zadania poznáme dĺžku skoku Rezňa, a to 2 730 mm. Skoky ostatných králikov z toho dopočítame, pričom všetko jednotne prevádzame na milimetre:

- Pečienka skočila o 1 100 mm menej ako Rezeň, t. j. skočila 1 630 mm,
- Fašírka skočila o 150 mm menej ako Pečienka, t. j. skočila 1 480 mm,
- Guláš skočil o 200 mm ďalej ako Fašírka, t. j. skočil 1 680 mm.

Králiky si v súťaži vyskákali nasledujúce poradie:
1. Rezeň, 2. Guláš, 3. Pečienka, 4. Fašírka.

---

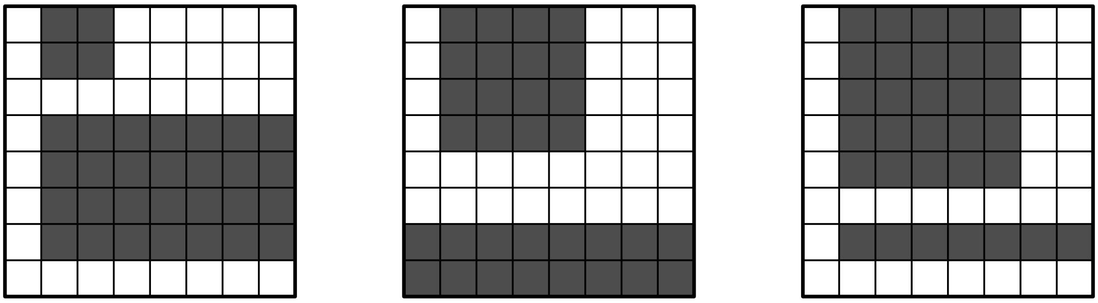
2. *Vzal som klasickú čierno-bielu šachovnicu, ktorá bola tvorená 8×8 štvorcovými políčkami so stranami dĺžky 3 cm. Políčka som v danom rámci preskupil tak, že vznikol jeden čierny obdĺžnik, jeden čierny štvorec a jeden súvislý biely útvar. Jednotlivé políčka sa aj po preskupení dotýkali celými stranami. Čierne útvary sa nedotýkali (ani rohom) a každý z nich mal aspoň jednu stranu spoločnú s okrajom šachovnice. Určte najväčší možný obvod bieleho útvaru a nakreslite, ako by v takom prípade mohol vyzerať.*
(*Martin Mach*)

Nápad. Aké rozmery mohol mať štvorec?

Riešenie. Šachovnica má celkom 32 čiernych (a 32 bielych) políčok, čo musí byť súčet políčok novo vzniknutých čiernych útvarov. Čierny štvorec teda môže mať rozmery nanajvýš 5×5 políčok. Postupne rozoberieme všetky možnosti podľa veľkosti čierneho štvorca, určíme, koľko políčok ostáva na čierny obdĺžnik a aké by mohol mať rozmery, a nakoniec rozhodneme, či je možné také útvary umiestniť podľa uvedených požiadaviek:

štvorec	na obdĺžnik ostáva	dá sa umiestniť
1×1	1×31	NIE
2×2	1×28	NIE
2×2	2×14	NIE
2×2	4×7	ÁNO
3×3	1×23	NIE
4×4	1×16	NIE
4×4	2×8	ÁNO
5×5	1×7	ÁNO

Všetky prípady, ktoré sa nedajú uspokojivo umiestniť, presahujú niektorým svojim rozmerom daný rámec šachovnice. Vo vyhovujúcich prípadoch je možné čierne útvary umiestniť napr. takto:



Pri každom prípade možno umiestnenie aspoň jedného z čiernych útvarov meniť bez toho, aby došlo k porušeniu niektorej z požiadaviek. Pri takých zmenách obvod bieleho útvaru buď zostáva rovnaký, alebo sa zmenší (ak sa niektorý z čiernych útvarov posunie do rohu šachovnice).

Obvod bieleho útvaru vo vyššie uvedených prípadoch pozostáva z 50, 36, resp. 56 strán políčok. Najväčší je teda v treťom prípade a je $56 \cdot 3 = 168\,(\mathrm{cm})$.

---

3. *Mamička dala do misy 56 jahôd a 39 malín a zaniesla ich Eme, ktorá si čítala. Ema si čítanie spríjemnila maškrtením, a to tak, že si postupne brala po dvoch náhodných kusoch ovocia:*

- *Keď vytiahla dve maliny, vymenila ich u mamičky za jednu jahodu a tú vrátila do misy.*
- *Keď vytiahla dve jahody, jednu zjedla a druhú vrátila do misy.*
- *Keď vytiahla jednu jahodu a jednu malinu, zjedla jahodu a malinu vrátila do misy.*

Takto nejakú chvíľu maškrtila, až v mise zostal jediný kus ovocia. Rozhodnite (a vysvetlite), či to bola jahoda, alebo malina. (*Libuše Hozová*)

Nápad. Je Ema všetko ovocie z misy, alebo je prieberčivá?

Riešenie. Ema sa pri maškrtení dôsledne vyhýbala malinám: ak v jej výbere bola jedna malina, vracala ju späť do misy, ak vytiahla dve maliny, vymenila ich za jahodu. Počet malín v mise sa tak znižoval len po dvoch.

Keďže na začiatku bol v mise nepárny počet malín, zostával nepárny aj po každej transakcii. Teda posledným kusom ovocia v mise bola malina.

Poznámka. Na rozdiel od malín sa počty jahôd v mise menili po jednej (a mohli sa ako znižovať, tak zvyšovať). Parita pôvodného počtu jahôd nemá na riešenie úlohy vplyv.

---

4. *Ctibor naprogramoval dva spolupracujúce rysovacie roboty Mikiho a Nikiho. Miki vie zostrojovať štvorce, pravidelné päťuholníky a pravidelné šesťuholníky. Počas jedného dňa však rysuje iba navzájom zhodné mnohouholníky. Niki do všetkých Mikiho mnohouholníkov doplňa všetky uhlopriečky.*

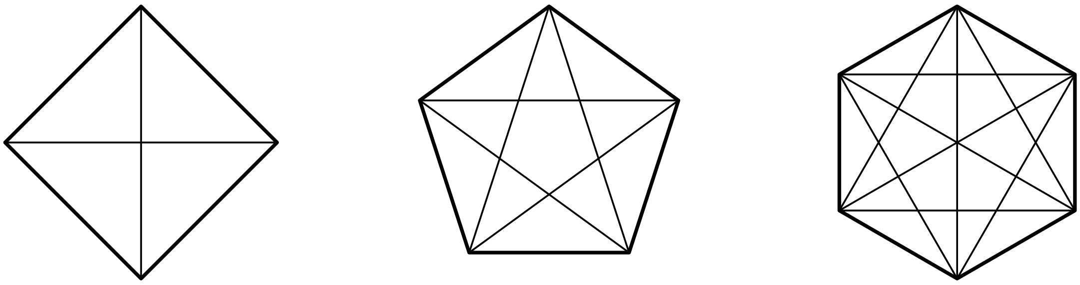
1. *V pondelok zostrojil Miki rovnaký počet úsečiek ako Niki. Aké mnohouholníky rysovali?*
2. *V utorok zostrojil Miki 18 úsečiek. Koľko ich zostrojil Niki?*

3. *V stredu zostrojili Miki a Niki dokopy 70 úsečiek. Koľko mnohouholníkov im dal Ctibor rysovať?*

(*Michaela Petrová*)

Nápad. Koľko úsečiek zostrojí Miki a Niki pri štvorci, päťuholníku, resp. šesťuholníku?

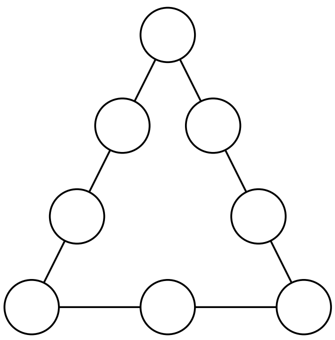
Riešenie. Štvorec má dve uhlopriečky, päťuholník päť a šesťuholník deväť:



1. Rovnaký počet strán a uhlopriečok má jedine päťuholník. V pondelok roboti rysovali päťuholníky.
2. Miki zostrojil 18 strán, teda nezostrojoval ani štvorce, ani päťuholníky (18 nie je deliteľné ani 4, ani 5), zostrojil tri šesťuholníky ($18 : 6 = 3$). V troch šesťuholníkoch je 27 uhlopriečok ($3 \cdot 9 = 27$). V utorok Niki zostrojil 27 úsečiek.
3. Celkový počet úsečiek pri jednom štvorci je 6, pri jednom päťuholníku 10 a pri jednom šesťuholníku 15. Miki a Niki zostrojili dokopy 70 úsečiek, teda nezostrojovali ani štvorce, ani šesťuholníky (70 nie je deliteľné ani 6, ani 15), zostrojili 7 päťuholníkov ($70 : 10 = 7$). V stredu dostali za úlohu narysovať 7 päťuholníkov.

---

5. *Petra vpisovala do krúžkov čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tak, že každé bolo použité práve raz a že súčet čísel na každej strane trojuholníka bol rovnaký. Aký najväčší súčet mohla takto dostať? Uveďte príklad možného vyplnenia.* (*Alžbeta Bohiniková*)

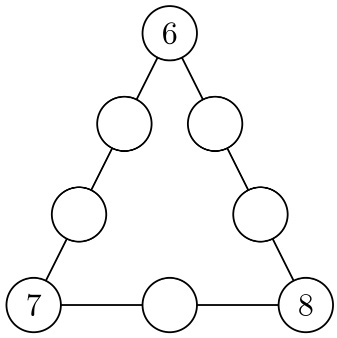


Nápad. Kam má Petra vpisovať najväčšie čísla?

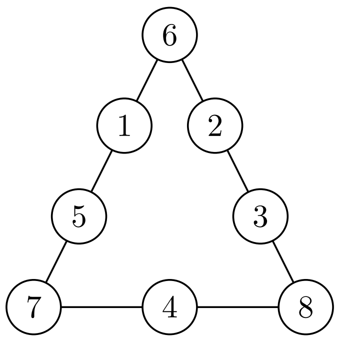
Riešenie. Čísla vo vrcholoch trojuholníka prispievajú do súčtov na dvoch stranách, zatiaľ čo ostatné čísla len na jednej. Väčšie čísla vo vrcholoch trojuholníka preto budú dávať väčšie súčty.

Umiestnime trojicu najväčších čísel do vrcholov trojuholníka a skúsime doplniť zvyšné čísla. Úvodné umiestnenie možno spraviť celkom šiestimi spôsobmi, avšak podstatné je iba číslo v hlavnom (najvyššom) vrchole – prípadné doplnenia pre prehodené čísla vo zvyšných vrcholoch sú po dvojiciach osovo súmerné. Postupne rozoberieme všetky možnosti.

- V hlavnom vrchole 6:

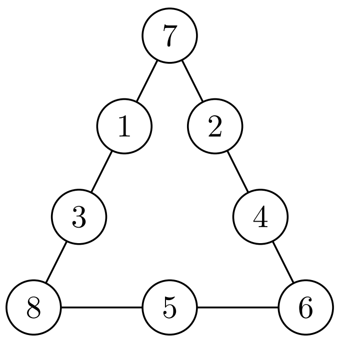


Súčet vpísaných čísel na základni trojuholníka je 15, na ľavom ramene 13, na pravom ramene 14. Čísla 1, 2, 3, 4, 5 potrebujeme umiestniť tak, aby kompenzovali rozdiely medzi existujúcimi súčtami na jednotlivých stranách. To je možné spraviť napr. takto:



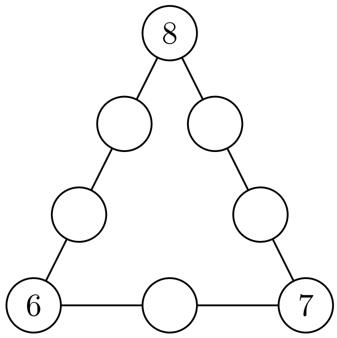
Súčet čísel na každej strane je 19.

- V hlavnom vrchole 7: Podobnou úvahou ako v predchádzajúcom prípade dostávame nasledujúce riešenie:

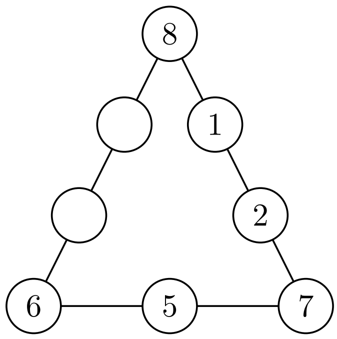


Súčet čísel na každej strane je 19.

- V hlavnom vrchole 8:



Súčet vpísaných čísel na základni trojuholníka je 13, na ľavom ramene 14, na pravom ramene 15. Chýbajúce číslo na základni teda má byť o 1 väčšie ako súčet chýbajúcich čísel na ľavom ramene a o 2 väčšie ako súčet čísel na pravom ramene. Druhú požiadavku možno splniť nasledujúcim doplnením, ktoré je jednoznačné až na poradie novej dvojice čísel na pravom ramene:



Na ľavé rameno tak ostáva dvojica 3 a 4, ktorá však nevyhovuje prvej požiadavke. V hlavnom vrchole teda 8 byť nemôže.

Najväčší možný súčet, ktorý možno požadovaným spôsobom dostať, je 19. Dva príklady možného vyplnenia sú vyššie.

Poznámka. Súčet daných čísel je $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Pri umiestnení čísel 6, 7, 8 do vrcholov trojuholníka vychádza súčet súčtov čísel na jeho stranách $36+6+7+8=57$. Súčet čísel na každej strane by tak mal byť $57:3=19$. Tento postreh nám umožňuje rýchlo doplniť chýbajúce číslo na základni trojuholníka:

- pre 6 v hlavnom vrchole vychádza $19-7-8=4$,
- pre 7 v hlavnom vrchole vychádza $19-6-8=5$,
- pre 8 v hlavnom vrchole vychádza $19-6-7=6$.

V prvých dvoch prípadoch sa ľahko doplnia zvyšné čísla do prázdnych miest. V treťom prípade doplnenie nie je možné, lebo 6 by bola použitá dvakrát.

---

6. *Anička a Marienka majú každá svoje obľúbené prirodzené číslo. Ak vynásobíme Aničkino číslo samo so sebou, vyjde nám stokrát väčšie číslo, ako keď vynásobíme Marienkino číslo samo so sebou. Ak sčítame Aničkino a Marienkino obľúbené číslo, získame číslo o 18 väčšie, ako je polovica Aničkinho čísla. Určte Aničkino a Marienkino obľúbené číslo.* (*Eva Semerádová*)

Nápad.

Koľkokrát je Aničkino číslo väčšie ako Marienkino?

Riešenie. Aničkino číslo je desaťkrát väčšie ako Marienkino – jedine v tomto prípade je súčin Aničkinho čísla so sebou samým rovný stonásobku súčinu Marienkinho čísla so sebou samým ($10 \cdot 10 = 100$). Polovica Aničkinho čísla je teda päťkrát väčšia ako číslo Marienkino.

Súčet Aničkinho a Marienkinho čísla je o 18 väčší ako polovica Aničkinho čísla. Preto je 18 súčtom polovice Aničkinho čísla s číslom Marienkiným. Podľa záveru predchádzajúceho odseku je tento súčet rovný šesťnásobku Marienkinho čísla.

Teda Marienkino číslo je 3 ($18 : 6 = 3$) a Aničkino číslo je 30 ($10 \cdot 3 = 30$).

Poznámka. Ak Aničkino číslo označíme a a Marienkino číslo m, tak možno predchádzajúce úvahy zhrnúť nasledovne:

- $a \cdot a = 100 \cdot m \cdot m$, teda $a = 10m$, teda $\frac{1}{2}a = 5m$.
- $a + m = \frac{1}{2}a + 18$, teda $18 = \frac{1}{2}a + m = 6m$.
- $m = 18 : 6 = 3$ a $a = 10m = 30$.

Po úvodnom postrehu ($a = 10m$) je tiež možné postupne dosadzovať prirodzené čísla za m, vyjadrovať príslušný rozdiel ($a + m - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a + m$) a kontrolovať, či je alebo nie je rovný 18:

m	1	2	3	4	...
a	10	20	30	40	...
$\frac{1}{2}a + m$	6	12	18	24	...

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Monika Dillingerová, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020