2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

1. *Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí*

$$(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Roznásobením a ďalšími ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$ab + b^2c + a^2c + abc^2 \geqq abc^2 + 2abc + ab,$$
$$b^2c + a^2c \geqq 2abc,$$
$$(a-b)^2c \geqq 0.$$

Podľa zadania platí $c \geqq 0$ a druhá mocnina reálneho čísla $a-b$ je tiež nezáporná, takže je nezáporná aj ľavá strana upravenej nerovnosti. Rovnosť v tejto (a rovnako aj v pôvodnej nerovnosti) nastane práve vtedy, keď $a-b=0$ alebo $c=0$, teda práve vtedy, keď je splnená aspoň jedna z podmienok $a=b$, $c=0$.

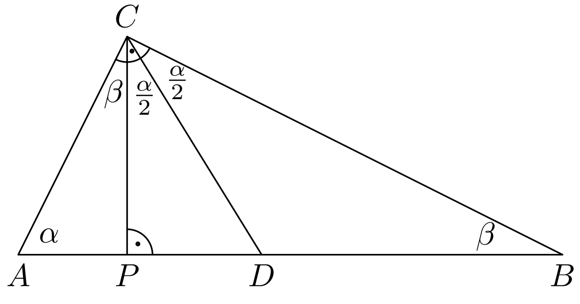
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za upravenú nerovnosť $(a-b)^2c \geqq 0$ dajte 4 body, ďalší 1 bod potom za argument o nezápornosti činiteľov. Odvodenie (nie však uhádnutie) oboch prípadov rovnosti oceňte tiež 1 bodom. Ten nedajte, ak nie je diskusia o rovnosti úplná (ak je napríklad vynechaná možnosť $c=0$).

---

2. *V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB. Priesečník úsečky AB s priamkou, ktorá prechádza vrcholom C a stredom kružnice vpísanej trojuholníku PBC, označíme D. Dokážte, že úsečky AD a AC sú zhodné.* (Pavel Leischner)

Riešenie. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB pre veľkosti α, β uhlov pri vrcholoch A, B platí $\alpha+\beta=90°$, preto $|\measuredangle ACP| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\measuredangle BCD| = |\measuredangle DCP| = \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$, lebo priamka CD je osou uhla BCP (obr. 1). Pre vonkajší uhol ADC trojuholníka BCD tak zrejme platí $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle DBC| + |\measuredangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle DCA|$.

Zistili sme, že trojuholník ADC má pri vrcholoch C, D zhodné vnútorné uhly, je teda rovnoramenný, a preto $|AD| = |AC|$.



Obr. 1

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Správne čiastočné poznatky vedúce k riešeniu oceňte 1 bodom (napríklad výpočet len jedného z uhlov ACD alebo ADC), nanajvýš dvoma bodmi.

3. *Keď isté dve prirodzené čísla v rovnakom poradí sčítame, odčítame, vydelíme a vynásobíme a všetky štyri výsledky sčítame, dostaneme* 2 009*. Určte tieto dve čísla.*

(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Pre hľadané prirodzené čísla x a y sa dá podmienka zo zadania vyjadriť rovnicou

$$(x+y)+(x-y)+\left(\frac{x}{y}\right)+(x\cdot y)=2\,009, \tag{1}$$

v ktorej sme čiastočné výsledky jednotlivých operácií dali do zátvoriek.

Vyriešme rovnicu (1) vzhľadom na neznámu x (v ktorej je, na rozdiel od neznámej y, rovnica *lineárna*):

$$\begin{aligned} 2x+\frac{x}{y}+xy&=2\,009,\\ 2xy+x+xy^2&=2\,009y,\\ x(y+1)^2&=2\,009y,\\ x&=\frac{2\,009y}{(y+1)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Hľadáme práve tie prirodzené čísla y, pre ktoré má nájdený zlomok celočíselnú hodnotu, čo možno vyjadriť vzťahom $(y+1)^2 \mid 2\,009y$. Keďže čísla y a $y+1$ sú nesúdeliteľné, sú nesúdeliteľné aj čísla y a $(y+1)^2$, takže musí platiť $(y+1)^2 \mid 2\,009 = 7^2\cdot 41$. Keďže $y+1$ je celé číslo väčšie ako 1 (a činitele 7, 41 sú prvočísla), poslednej podmienke vyhovuje iba hodnota $y=6$, ktorej po dosadení do (2) zodpovedá $x=246$. (Skúška nie je nutná, lebo rovnice (1) a (2) sú v obore prirodzených čísel ekvivalentné.)

Hľadané čísla v uvažovanom poradí sú 246 a 6.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za zostavenie rovnice (1) a 1 bod za vyjadrenie (2) či ekvivalentnú rovnicu v súčinovom tvare $x(y+1)^2 = 2\,009y$. Iba uhádnutie jej riešenia oceňte ďalším bodom. Ak je v inak úplnom riešení uvedená podmienka $(y+1)^2 \mid 2\,009$ bez potrebnej zmienky o nesúdeliteľnosti čísel y a $(y+1)^2$, 1 bod strhnite. Vynechanie skúšky (či zmienky o jej zbytočnosti) stratou bodu nepenalizujte.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.