2009/2010
59. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh MEMO*

I-1. *Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že pre všetky $x,y\in\mathbb{R}$ platí*

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+(y+1)f(x)+(x+1)f(y).$$

(*Česká rep., Pavel Calábek*)

Riešenie. Dosadením $y=0$ získame

$$0=f(0)(f(x)-x-2).$$

Ľahko možno overiť, že funkcia $f(x)=x+2$ *nie je* riešením, preto $f(0)=0$. Zvoľme teraz v zadanej rovnici $x=1$, $y=-1$. Dostaneme

$$0=f(-1)(f(1)-3),$$

teda $f(-1)=0$ alebo $f(1)=3$.

Ak $f(-1)=0$, po dosadení $x=2$, $y=-1$ máme $f(-2)=f(1)$. Následne zvolením $x=-2$, $y=1$ dostaneme $f(-2)f(1)=3f(-2)-f(1)$, odkiaľ vzhľadom na $f(-2)=f(1)$ vyplýva $f(1)\in\{0,2\}$.

Takže $f(1)=a\in\{0,2,3\}$. Ak položíme v zadanej rovnici $y=1$, dostaneme

$$f(x+1)=(3-a)f(x)+a(x+1) \tag{1}$$

pre všetky $x\in\mathbb{R}$.

Zvolením $y=1+1/x$, pričom $x\neq 0$ je ľubovoľné, máme

$$f\left(x+\tfrac{1}{x}+1\right)+f(x)f\left(\tfrac{1}{x}+1\right)=f(x+1)+\left(\tfrac{1}{x}+2\right)f(x)+f\left(\tfrac{1}{x}+1\right)(x+1).$$

S využitím (1) preto

$$(3-a)\left(f\left(x+\tfrac{1}{x}\right)+f(x)f\left(\tfrac{1}{x}\right)-(x+1)f\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)=f(x)\left(5-2a-(a-1)\tfrac{1}{x}\right)+2a+ax.$$

Odtiaľ s využitím vyjadrenia, ktoré dostaneme zo zadanej rovnice po dosadení $y=1/x$, po úprave dostaneme

$$\begin{aligned}(3-a)\left(a+f(x)\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right)&=f(x)\left(5-2a-(a-1)\cdot\tfrac{1}{x}\right)+2a+ax,\\ f(x)\left(-2+a+\tfrac{2}{x}\right)&=a^2+ax-a.\end{aligned}$$

Postupným dosadzovaním $a\in\{0,2,3\}$ už ľahko odvodíme jednotlivé riešenia $f(x)=0$, $f(x)=x^2+x$, $f(x)=3x$.[1] Jednoducho tiež možno overiť, že tieto tri funkcie vyhovujú zadanej rovnici.

---

[1] Prípady, keď $-2+a+\frac{2}{x}=0$, možno overiť osobitne napríklad s využitím (1).

I-2. *Na tabuli sú napísané všetky kladné delitele celého kladného čísla N. Dvaja hráči A a B hrajú nasledovnú hru, pričom sa pravidelne striedajú v ťahoch: V prvom ťahu hráč A zmaže číslo N. Ak posledné zmazané číslo je d, potom hráč, ktorý je na ťahu, zmaže deliteľa čísla d alebo násobok čísla d. Hráč, ktorý nemôže urobiť ťah, prehráva. Určte všetky čísla N, pre ktoré hráč A môže vyhrať bez ohľadu na ťahy hráča B.*

(*Poľsko*)

Riešenie. Nech $N = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ je prvočíselný rozklad čísla N. V každom ťahu hráč zmaže nejakého deliteľa čísla N, ktorého možno reprezentovať ako k-ticu $(b_1, \dots, b_k)$, pričom $b_i \leqq a_i$ (taká k-tica zodpovedá číslu $p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$). Podľa pravidiel hry po k-tici $(b_1, \dots, b_k)$ môže nasledovať $(c_1, \dots, c_k)$ práve vtedy, keď buď $c_i \leqq b_i$ pre všetky i, alebo $a_i \geqq c_i \geqq b_i$ pre všetky i (samozrejme, iba v prípade, že je taká k-tica ešte na tabuli).

Ak aspoň jedno z čísel a_i je nepárne – bez ujmy na všeobecnosti nech je to a_1 – tak víťaznú stratégiu má hráč B. Stačí, ak na každý ťah $(b_1, \dots, b_k)$ hráča A odpovie ťahom

$$(a_1 - b_1, b_2, \dots, b_k).$$

ľahko možno overiť, že je to víťazná stratégia: Všetky k-tice zodpovedajúce číslam, ktoré sú na začiatku na tabuli, možno totiž roztriediť do dvojíc, a keď A zmaže k-ticu z nejakej dvojice, B zmaže druhú k-ticu z tej istej dvojice ($a_1 - b_1 \neq b_1$, pretože a_1 je nepárne).

Ak sú všetky a_i párne, tak víťaznú stratégiu má hráč A. Nech B zotrie k-ticu $(b_1, \dots, b_k)$, pričom aspoň jedno spomedzi b_i je menšie ako a_i ($(b_1, \dots, b_k) \neq$ $\neq (a_1, \dots, a_k)$, lebo to bol prvý ťah hráča A). Označme j najmenší index taký, že $b_j < a_j$. Potom odpoveďou hráča A môže byť k-tica

$$(b_1, \dots, b_{j-1}, a_j - b_j - 1, b_{j+1}, \dots, b_k).$$

Aj v tomto prípade sú všetky pôvodné k-tice (okrem prvého ťahu $(a_1, a_2, \dots, a_k)$) roztriedené do dvojíc a keď B zmaže nejakú k-ticu, A zmaže druhú z tej istej dvojice ($a_j - b_j - 1 \neq b_j$, pretože a_j je párne).

Samozrejme, podmienka, že všetky a_i sú párne, je splnená práve pre tie N, ktoré sú druhou mocninou celých čísel. Hráč A teda môže vyhrať bez ohľadu na ťahy hráča B práve vtedy, keď N je štvorec.

I-3. *Je daný tetivový štvoruholník $ABCD$ a na jeho uhlopriečke AC bod E taký, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nech M je stred kružnice k opísanej trojuholníku BDE. Kružnica k pretína priamku AC v bodoch E a F. Dokážte, že priamky FM, AD a BC sa pretínajú v jednom bode.* (*Švajčiarsko*)

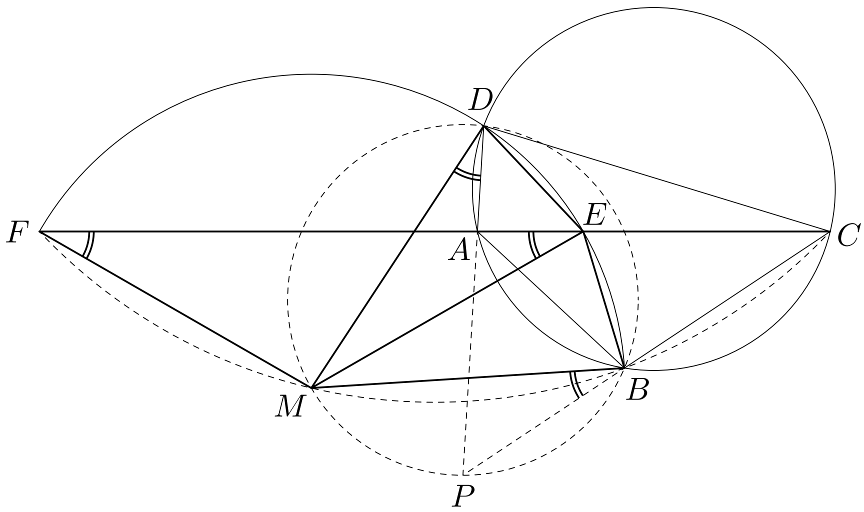
Riešenie. Predpokladajme, že A leží na úsečke CF (prípad, keď C leží na úsečke AF, je analogický). Označme P priesečník priamok BC a AD (obr. 1). Keďže $|MB| = |ME|$, $|BC| = |CE|$ a $|ME| = |MF|$, sú trojuholníky MBC a MEC zhodné a trojuholník EFM rovnoramenný, takže pre veľkosti uhlov máme

$$|\measuredangle MBC| = |\measuredangle MEC| = 180^\circ - |\measuredangle MEF| = 180^\circ - |\measuredangle MFC|.$$

Z toho vyplýva, že body M, B, C, F ležia na jednej kružnici. Keďže $|ME| = |MD|$ a $|AE| = |AD|$, sú trojuholníky MEA, MDA zhodné a $|\measuredangle AEM| = |\measuredangle ADM|$, čiže $|\measuredangle MDP = |\measuredangle MBP|$ a štvoruholník $MPBD$ je tetivový. Spolu s tetivovosťou štvoruholníkov $ABCD$, $FMBC$ tak dostávame

$$|\measuredangle PMB| = |\measuredangle PDB| = |\measuredangle ADB| = |\measuredangle ACB| = |\measuredangle FCB| = 180° - |\measuredangle FMB|.$$

Takže body F, M, P ležia na jednej priamke a priamky AD, BC sa FM pretínajú v jednom bode (v bode P).



Obr. 1

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení dokážeme, že štvoruholník $FMBC$ je tetivový. Keďže body M, A ležia na osi úsečky DE, platí $|\measuredangle MDA| = |\measuredangle MEA|$. Z rovnosti $|ME| = |MF|$ zase $|\measuredangle MFA| = |\measuredangle MEA|$. Takže štvoruholník $MADF$ je tetivový.

Priamky FM, AD, BC sú teda chordálami kružníc opísaných tetivovým štvoruholníkom $FMBC$, $BCDA$, $ADFM$, z čoho podľa známeho tvrdenia vyplýva, že sa pretínajú v jednom bode (ktorý má ku všetkým trom kružniciam rovnakú mocnosť).

I-4. *Nájdite všetky kladné celé čísla n, ktoré vyhovujú obom nasledujúcim podmienkam:*

(i) *číslo n má aspoň štyri kladné delitele;*

(ii) *ak a a b sú delitele čísla n, pre ktoré platí $1 < a < b < n$, potom číslo $b - a$ tiež delí n.*

(*Slovinsko*)

Riešenie. Prvočísla, druhé mocniny prvočísel a číslo 1 nespĺňajú prvú podmienku, z ďalších úvah ich preto vynecháme.

Najskôr predpokladajme, že n je párne, t. j. $n = 2x$ pre nejaké $x \in \mathbb{N}$. Potom podľa druhej podmienky $x - 2$ delí n. Každý deliteľ n menší ako $x = n/2$ je menší alebo rovný $n/3$. Preto $x - 2 \leqq n/3$, odkiaľ $x \leqq 6$. Postupným overením všetkých prípustných hodnôt x ľahko zistíme, že vyhovujú $n = 6$, $n = 8$ a $n = 12$.

Ďalej môžeme predpokladať, že n je nepárne. Nech $n = px$, pričom p je najmenší netriviálny deliteľ čísla n. Číslo p je očividne nepárne prvočíslo. Zrejme $p + 1 \nmid n$, lebo $p + 1$ je párne, takže $x \neq p + 1$. Keďže $1 < p < x < n$, máme $x - p \mid px$.

Ak $p \nmid x$, tak $x-p$ a x sú nesúdeliteľné, teda nutne $x-p \mid p$, odkiaľ $x-p \leqq p$. Avšak $x \neq p+1$, čiže $x-p \geqq p$ (lebo p je najmenší netriviálny deliteľ). Preto musí platiť $x=2p$, čo je v spore s tým, že n je nepárne.

Ak $p \mid x$, tak $x=py$ pre nejaké celé číslo $y>1$. Z minimálnosti p vyplýva $y \geqq p$. Podľa druhej podmienky $py-p \mid n=p^2y$; z čoho $y-1 \mid py$. Keďže $y-1$ a y sú nesúdeliteľné, nutne $y-1 \mid p$, odkiaľ $y \leqq p+1$. Ak $y=p+1$, tak y je párnym deliteľom čísla n, čo je v spore s predpokladom, že n je nepárne. Ak $y=p$, máme spor s podmienkou $y-1 \mid p$ (keďže $p \geqq 3$). Iné možnosti vzhľadom na nerovnosť $y \geqq p$ nie sú.

Odpoveď. Obom podmienkam vyhovujú iba čísla 6, 8 a 12.

T-1. *Sú dané tri rastúce postupnosti*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots, \qquad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots, \qquad c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots$$

celých kladných čísel. Každé celé kladné číslo je členom práve jednej z týchto postupností. Pre každé celé kladné číslo n sú splnené podmienky:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;
(ii) $a_{n+1} > b_n$;
(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ *je párne.*

Nájdite a_{2010}, b_{2010} *a* c_{2010}. (*Litva*)

Riešenie. Keďže postupnosť $\{c_n\}$ je rastúca, platí zrejme $c_n \geqq n$. Preto aj $c_{a_n} \geqq a_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Avšak postupnosti neobsahujú rovnaké členy, nutne teda

$$c_{a_n} > a_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Postupnosti budeme „napĺňať" induktívne. Najskôr dokážeme, že $a_1=1$. Keby to tak nebolo, t. j. keby platilo $a_1>1$, muselo by byť buď $c_1=1$ alebo $b_1=1$. Druhá možnosť nepripadá do úvahy, pretože podľa (i) a (1) máme $b_1=c_{a_1}-1>a_1-1$, teda $b_1>a_1$ (keďže $b_1 \neq a_1$). Ak by bolo $c_1=1$, tak $b_1 \neq 2$ (lebo $b_1>a_1$), $c_2 \neq 2$ (kvôli (iii) pre $n=1$), teda by muselo byť $a_1=2$. Avšak potom $a_2 \neq 3$ (lebo $a_2>b_1$), $b_1 \neq 3$ (lebo v takom prípade by bolo $c_2=c_{a_1}=b_1+1=4$ a neplatilo by (iii) pre $n=1$) a aj $c_2 \neq 3$ (lebo $c_2=c_{a_1}=b_1+1 \neq 3$).

Teraz nájdeme v postupnostiach miesto pre číslo 2. Ak $a_2=2$, tak podľa (ii) platí $2=a_2>b_1$, čo už nie je možné. Ak $c_1=2$, tak podľa (i) máme $2=c_1=c_{a_1}=b_1+1$, teda $b_1=1$, čo už tiež nie je možné. Ostáva iba možnosť $b_2=2$. Potom podľa (i) dostaneme $c_1=c_{a_1}=b_1+1=3$.

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1					
b_n	2					
c_n	3					

Kvôli (iii) je $c_2 \neq 4$. Taktiež $b_2 \neq 4$, lebo inak podľa (1) a (i) $a_2 < c_{a_2} = b_2+1 = 5$ a pre a_2 by už neostala žiadna hodnota. Takže $a_2=4$. Následne podľa (ii) máme $a_3 \neq 5$, a aj $b_2 \neq 5$, lebo inak by podľa (i) bolo $c_4=c_{a_2}=b_2+1=6$ a pre c_2, c_3 by už nezvýšili žiadne hodnoty. Preto $c_2=5$. Rovnakou úvahou dostaneme $a_3 \neq 6$, $b_2 \neq 6$, teda $c_3 = 6$. Ďalej $a_3 \neq 7$ (podľa (ii)), $c_4 \neq 7$ (lebo inak podľa (i) $7 = c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1$, z čoho $b_2 = 6$), čiže $b_2 = 7$. Odtiaľ $c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1 = 8$.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1	4				
b_n	2	7				
c_n	3	5	6	8		

Teraz môžeme znova zopakovať úvahy z predošlého odseku: Kvôli (iii) máme $c_5 \neq$ $\neq 9$. Z (1) a (i) vyplýva $b_3 \neq 9$ (inak $a_3 < c_{a_3} = b_3 + 1 = 10$ a neostane voľná hodnota pre a_3). Preto $a_3 = 9$. Podľa (ii) je $a_4 \neq 10$. Z (i) dostaneme $c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1$, preto $b_3 \neq 10$ (inak neostanú voľné hodnoty pre $c_5, \ldots, c_8$). Takže $c_5 = 10$. Podobne

$$\begin{aligned} a_4 \neq 11,\ b_3 \neq 11 &\implies c_6 = 11, \\ a_4 \neq 12,\ b_3 \neq 12 &\implies c_7 = 12, \\ a_4 \neq 13,\ b_3 \neq 13 &\implies c_8 = 13. \end{aligned}$$

Napokon, $a_4 \neq 14$ (z (ii)), $c_9 \neq 14$ (inak podľa (i) by bolo $14 = c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1$, teda $b_3 = 13$, čo neplatí), čiže $b_3 = 14$ a $c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1 = 15$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	1	4	9							
b_n	2	7	14							
c_n	3	5	6	8	10	11	12	13	15	

Sformulujeme tvrdenie, ktoré možno jednoducho dokázať matematickou indukciou. Formálny dôkaz, ktorý je triviálnym zovšeobecnením predošlých dvoch odsekov, vynecháme. Pre $k \in \mathbb{N}$ a $i = 1, 2, \ldots, 2k - 2$ platí

$$\begin{aligned} &a_k = k^2, \\ &b_k = k^2 + 2k - 1, \\ &c_{(k-1)^2+i} = k^2 + i, \\ &c_{k^2} = k^2 + 2k. \end{aligned}$$

Na základe toho už ľahko dopočítame žiadané hodnoty:

$$a_{2010} = 2010^2, \quad b_{2010} = 2010^2 + 2 \cdot 2010 - 1, \quad c_{2010} = c_{44^2+74} = 45^2 + 74 = 2099.$$

T-2. *Pre každé celé číslo $n \geqq 2$ určte najväčšie možné reálne číslo C_n také, že pre všetky kladné reálne čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí*

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

(*Švajčiarsko*)

Riešenie. Pre $1 \leqq i < j \leqq n$ označme $x_{ij} = a_i - a_j$. Výrazy

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \qquad \text{a} \qquad \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

budeme skrátene označovať KP (kvadratický priemer) a AP (aritmetický priemer). Rozdiel ich štvorcov (vyskytujúci sa v zadaní) možno po vynásobení n^2 upraviť na

$$n^2(\mathrm{KP}^2 - \mathrm{AP}^2) = n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) - (a_1 + \cdots + a_n)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i<j} 2a_i a_j =$$

$$= \sum_{i<j} x_{ij}^2 = x_{1n}^2 + \sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i}^2 + x_{in}^2) + \sum_{1<i<j<n} x_{ij}^2.$$

Posledná suma je evidentne nezáporná. Pre sumu v prostriedku platí podľa triviálnej nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq \frac{1}{2}(a+b)^2$ odhad

$$\sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i}^2 + x_{in}^2) \geqq \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i} + x_{in})^2 = \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2.$$

Takže spolu máme

$$n^2(\mathrm{KP}^2 - \mathrm{AP}^2) \geqq x_{1n}^2 + \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2 = \frac{n}{2} \cdot (a_1 - a_n)^2,$$

pričom rovnosť zrejme nastáva práve vtedy, keď $a_2 = \ldots = a_{n-1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$. Teda najväčšia možná hodnota je

$$C_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}.$$

T-3. *V každom vrchole pravidelného n-uholníka je veža. V tom istom okamihu každá veža vystrelí na jednu z dvoch susedných veží a zasiahne ju. Výsledkom streľby nazveme množinu všetkých zasiahnutých veží, pričom nerozlišujeme, či bola veža zasiahnutá raz alebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všetkých možných výsledkov streľby (pre dané n). Dokážte, že pre každé celé $k \geqq 3$ sú čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesúdeliteľné.*

(*Česká rep., Martin Panák*)

Riešenie. Každú zasiahnutú vežu označme čiernou farbou, ostatné (nezasiahnuté) veže bielou. Číslo $P(n)$ je v skutočnosti počtom takých ofarbení n veží čiernou a bielou farbou, že žiadne dve biele veže nemajú medzi sebou práve jednu vežu. Dôkaz ekvivalencie so zadaním, teda bijektívnosti medzi opísanými ofarbeniami a výsledkami streľby, je triviálny: Ak medzi dvoma bielymi vežami je práve jedna veža, tak táto veža nemá do koho streliť, čo nie je možné. Na druhej strane, ak také dve biele veže neexistujú, tak každá veža môže vystreliť do aspoň jednej čiernej, a aby sme sa uistili, že každá čierna veža bude zasiahnutá, stačí predpísať, že do každej čiernej veže bude strieľať tá veža, ktorá sa nachádza po smere hodinových ručičiek.

Ak n je nepárne, tak $P(n)$ je rovné počtu $K(n)$ ofarbení n veží na kružnici čiernou a bielou farbou tak, že žiadne dve susedné veže nie sú obe biele (jednoducho definujeme „susedné“ veže ako tie, ktoré majú medzi sebou práve jednu vežu). Pre párne n sa pri rovnakom definovaní „susednosti“ celá kružnica rozpadne na dve menšie s $\frac{1}{2}n$ vežami, teda $P(n) = K(\frac{1}{2}n)^2$.

Pre hodnoty $K(n)$ odvodíme rekurentný vzťah:

Počet vyhovujúcich ofarbení s n-tou vežou čiernou je totiž rovný počtu vyhovujúcich ofarbení $n-1$ veží (jednoducho vložíme čiernu vežu medzi prvú a $(n-1)$-tú vežu) zväčšenému o počet ofarbení $n-1$ veží nemajúcich žiadne dve susedné veže biele okrem prvej a $(n-1)$-tej (čiernu vežu môžeme vložiť medzi tieto dve biele veže a získame vyhovujúce ofarbenie).V druhom prípade dostaneme taký istý počet možností, aký je počet vyhovujúcich ofarbení $n-2$ veží s prvou vežou bielou (stačí spojiť dve susedné biele veže do jednej).

Počet vyhovujúcich ofarbení s n-tou vežou bielou je rovný počtu takých ofarbení $n-1$ veží, že žiadne dve susedné nie sú biele a prvá a $(n-1)$-tá sú čierne (bielu vežu môžeme vložiť len medzi dve čierne). Tento počet je rovný počtu vyhovujúcich ofarbení $n-2$ veží, pričom prvá je čierna (opäť môžeme dve susedné čierne spojiť do jednej).

Spolu teda

$$K(n) = K(n-1) + K_b(n-2) + K_c(n-2) = K(n-1) + K(n-2),$$

pričom K_b a K_c je počet vyhovujúcich ofarbení s prvou vežou bielou, resp. čiernou.

Priamo vieme spočítať hodnoty $K(2) = 3$, $K(3) = 4$, $K(4) = 7$, teda

$$K(2) = F(4) - F(0), \qquad K(3) = F(5) - F(1), \qquad K(4) = F(6) - F(2)$$

a indukciou ľahko dokážeme, že $K(n) = F(n+2) - F(n-2)$, pričom $F(k)$ je k-ty člen Fibonacciho postupnosti ($F(0) = 0$, $F(1) = F(2) = 1,\ldots$). Navyše $(K(2), K(3)) = 1$ a pre $n \geqq 3$ máme

$$(K(n), K(n-1)) = (K(n) - K(n-1), K(n-1)) = (K(n-2), K(n-1)) = \ldots = 1.$$

Podobne ukážeme, že pre každé párne $n = 2a$ je číslo $P(n) = K(a)^2$ nesúdeliteľné s oboma číslami $P(n+1) = K(2a+1)$ a $P(n-1) = K(2a-1)$:

$$\begin{aligned}
(K(a), K(2a+1)) &= (K(a), F(2)K(2a) + F(1)K(2a-1)) = \\
&= (K(a), F(3)K(2a-1) + F(2)K(2a-2)) = \ldots \\
\ldots &= (K(a), F(a+1)K(a+1) + F(a)K(a)) = (K(a), F(a+1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a-2), F(a+1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a+1) - F(a-2), F(a+1)) = \\
&= (F(a) - F(a-2), F(a+1)) = (F(a-1), F(a+1)) = \\
&= (F(a-1), F(a)) = 1, \\
(K(a), K(2a-1)) &= (K(a), F(2)K(2a-2) + F(1)K(2a-3)) = \\
&= (K(a), F(3)K(2a-3) + F(2)K(2a-4)) = \ldots \\
\ldots &= (K(a), F(a)K(a) + F(a-1)K(a-1)) = (K(a), F(a-1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a-2), F(a-1)) = (F(a+2) - F(a), F(a-1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a+1), F(a-1)) = (F(a), F(a-1)) = 1,
\end{aligned}$$

čím je úloha vyriešená.

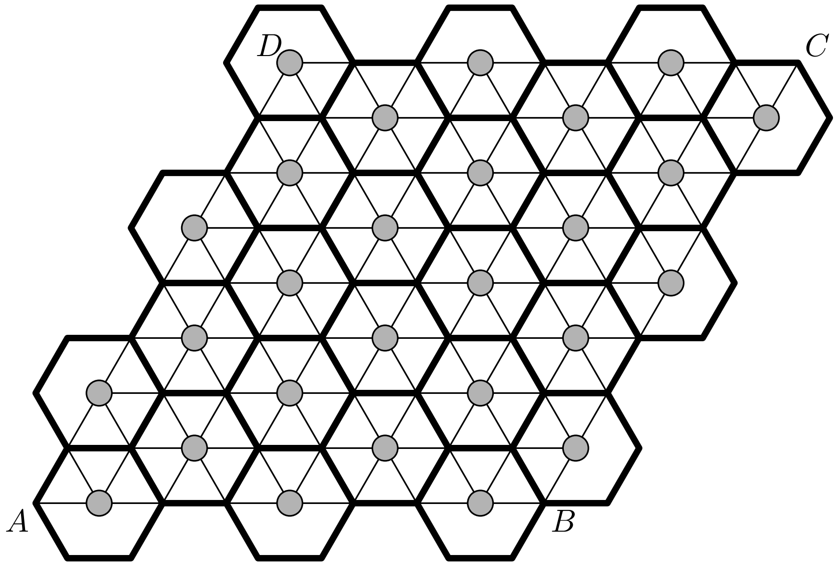
T-4. *Nech n je celé kladné číslo. Štvorec $ABCD$ je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Každý z týchto štvorcov je ďalej rozdelený na dva trojuholníky uhlopriečkou rovnobežnou s úsečkou BD. Niektoré z vrcholov malých štvorcov sú zafarbené na červeno tak, že každý z $2n^2$ vytvorených trojuholníkov má aspoň jeden červený vrchol. Nájdite najmenší možný počet červených vrcholov.* (*Slovinsko*)

Riešenie. Najmenší možný počet červených vrcholov je

$$\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor .$$

Najskôr ukážeme vyhovujúce ofarbenie s takýmto počtom. V druhej časti dokážeme, že menší počet červených vrcholov nestačí.

Namiesto štvorca budeme uvažovať kosoštvorec $ABCD$, v ktorom namiesto pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov budú rovnostranné trojuholníky. Kosoštvorec pokryjeme pravidelnými jednotkovými šesťuholníkmi tak, aby vrchol A ležal vo vrchole šesťuholníka. Stred každého šesťuholníka zafarbíme červenou (na obr. 2 sivou). Zrejme každý rovnostranný trojuholník leží v niektorom šesťuholníku a teda má červený vrchol.



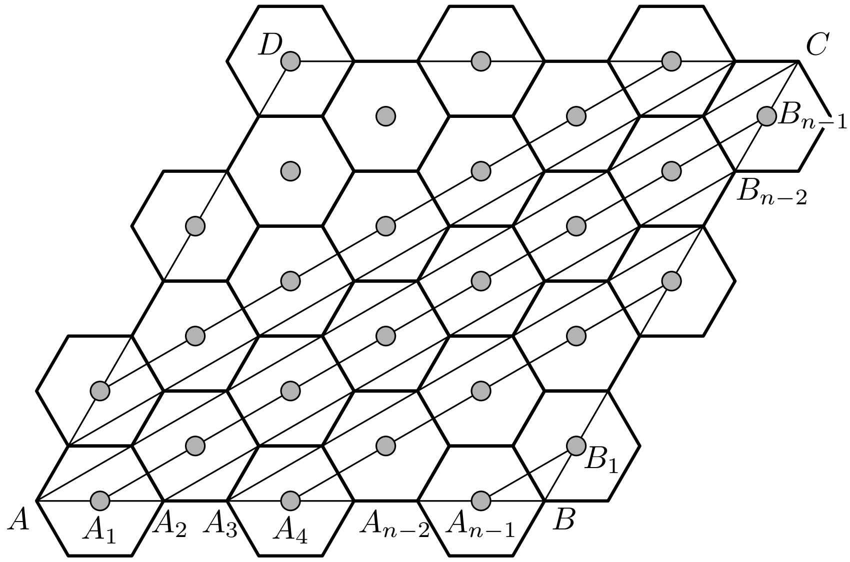
Obr. 2

Označme a_n počet červených vrcholov pri tomto ofarbení. Stranu AB rozdeľme bodmi A_1, A_2, …, A_{n-1} na n jednotkových úsekov. Podobne označme body B_1, …, B_{n-1} na BC, C_1, …, C_{n-1} na CD a D_1, …, D_{n-1} na DA.

Každý spomedzi n vrcholov na priamke A_1B_{n-1} je červený (obr. 3). Rovnobežky A_2B_{n-2}, A_3B_{n-3} nemajú žiadne červené vrcholy. Rovnobežka A_4B_{n-4} obsahuje o 3 červené vrcholy menej ako A_1B_{n-1}, t. j. $n-3$. Podobne ležia červené vrcholy na priamkach A_7B_{n-7}, $A_{10}B_{n-10}$, atď. Ich počet zakaždým klesne o 3. Z druhej strany uhlopriečky AC máme $n-1$ červených vrcholov na C_2D_{n-2}, $n-4$ na C_5D_{n-5} atď. Takže celkový počet červených vrcholov je

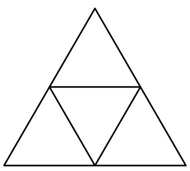
$$a_n = \big(n + (n-3) + (n-6) + \dots\big) + \big((n-1) + (n-4) + (n-7) + \dots\big).$$

Ak $n = 3k+1$, tak $a_n = \frac{1}{3}n(n+2)$, pre $n = 3k+2$ dostaneme $a_n = \frac{1}{3}(n+1)^2$ a v prípade $n = 3k+3$ dostaneme $a_n = \frac{1}{3}n(n+2)$. Všeobecne možno tento počet vyjadriť vzťahom $a_n = \lfloor \frac{1}{3}(n+1)^2 \rfloor$.

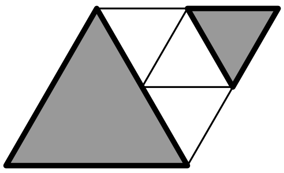


Obr. 3

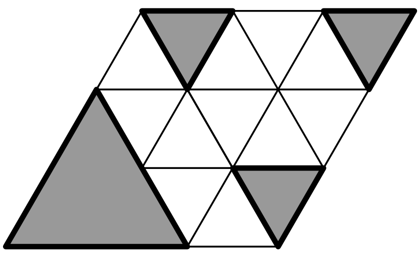
Označme b_n najmenší možný počet červených vrcholov. Zrejme $b_1 = 1$. V každom rovnostrannom trojuholníku zloženom zo štyroch jednotkových trojuholníkov (obr. 4) musia byť zrejme zafarbené červenou aspoň dva vrcholy. Každý z malých vyznačených trojuholníkov na obr. 5a a 5b musí obsahovať aspoň jeden červený vrchol a väčšie vyznačené trojuholníky aspoň dva. Preto $b_2 \geqq 2 + 1 = 3$ a $b_3 \geqq 1+1+1+2 = 5$.



Obr. 4



Obr. 5a



Obr. 5b

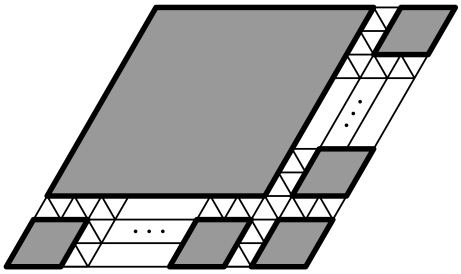
Pre $n = 1, 2, 3$ sme ukázali $b_n \geqq a_n$, teda nutne $b_n = a_n$. Pre ostatné hodnoty n použijeme matematickú indukciu, ktorej prvý krok sme už urobili. V druhom kroku dokážeme, že ak $b_{n-3} = a_{n-3}$, tak $b_n = a_n$.

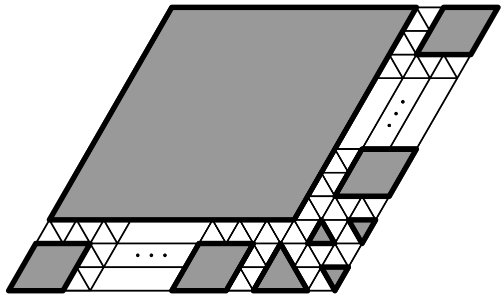
Nech $n = 3k+2$. Ako ukazuje obr. 6a, potrebujeme aspoň $b_{n-3}+(2k+1)b_2$ červených vrcholov, t. j.

$$b_n \geqq b_{n-3} + (2k+1) \cdot 3 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$

Ak $n = 3k + 3$, dostávame odhad (obr. 6b)

$$b_n \geqq b_{n-3} + 2kb_2 + 2 + 1 + 1 + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2(n-3) + 5 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$

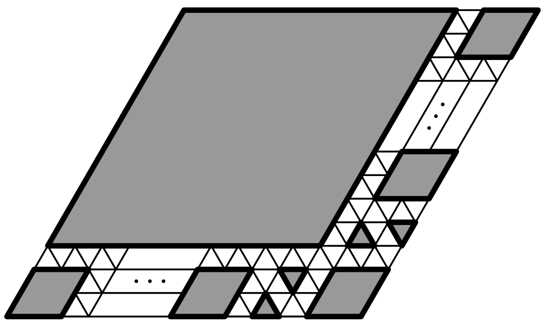

Obr. 6a


Obr. 6b

Napokon, ak $n = 3k + 1$, tak z obr. 6c máme

$$b_n \geqq b_{n-3} + (2(k-1)+1)b_2 + 1 + 1 + 1 + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$

Vo všetkých prípadoch $b_n \geqq a_n$, teda $b_n = a_n$.


Obr. 6c

T-5. *Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, CA a AB postupne v bodoch D, E a F. Nech K je bod súmerný s bodom D podľa stredu vpísanej kružnice. Priamky DE a FK sa pretínajú v bode S. Dokážte, že priamka AS je rovnobežná s BC.*
(*Poľsko*)

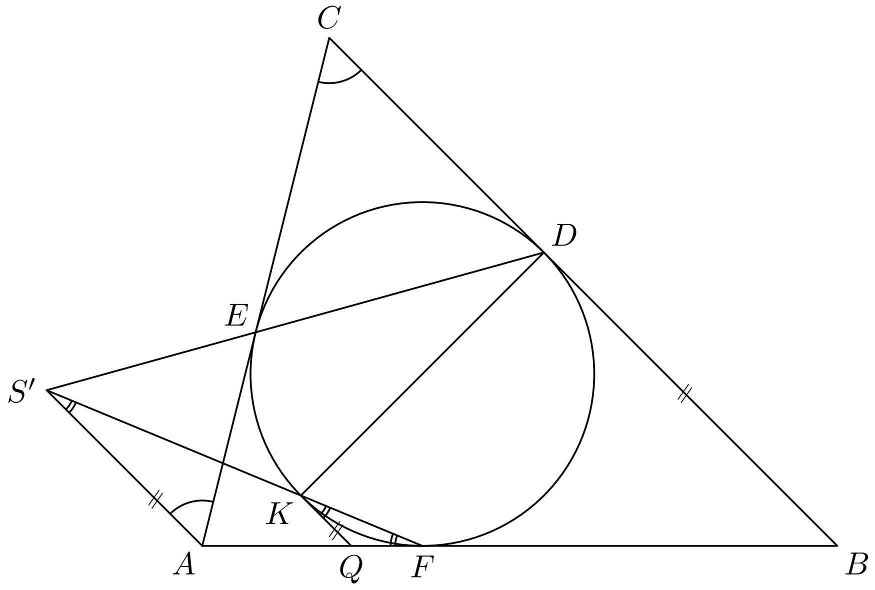
Riešenie. Nech S' je priesečník priamky FK a rovnobežky so stranou BC vedenej bodom A. Našou úlohou je dokázať, že body S', D, E ležia na jednej priamke. Priesečník strany AB s dotyčnicou ku vpísanej kružnici vedenou bodom K označme Q (obr. 7). Zrejme $KQ \parallel BC$. Preto

$$|\measuredangle AS'F| = |\measuredangle QKF| = |\measuredangle QFK|,$$

z čoho $|AS'| = |AF| = |AE|$. Platí tiež $|DC| = |EC|$ a $BC \parallel AS'$. Takže

$$|\measuredangle CDE| = |\measuredangle CED| = |\measuredangle AES'| = |\measuredangle AS'E| = |\measuredangle AES|$$

a S', D, E naozaj ležia na jednej priamke.



Obr. 7

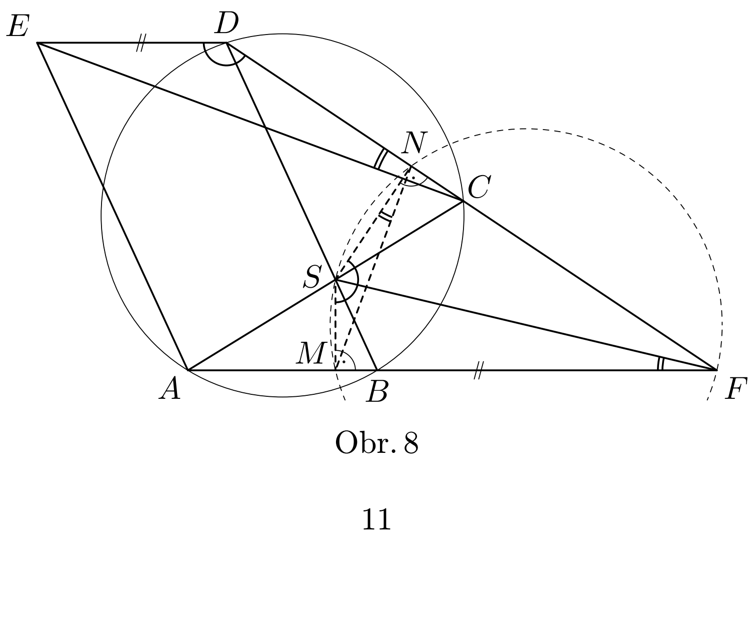
Iné riešenie. Označme $\alpha = |\measuredangle BAC|$, $\beta = |\measuredangle ABC|$ a I stred vpísanej kružnice. Potom

$$|\measuredangle IDF| = |\measuredangle IFD| = \tfrac{1}{2}\beta = |\measuredangle AFS|,$$

lebo $|\measuredangle KFD| = |\measuredangle AFI| = 90°$. Keďže $|\measuredangle FDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle FIE| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ ($AFIE$ je tetivový) a $|\measuredangle AIF| = 90° - \alpha/2$, sú trojuholníky AFI, SFD podobné. Z pomeru podobnosti máme $|AF| : |SF| = |IF| : |DF|$ a z $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle IFD|$ vyplýva podobnosť trojuholníkov AFS, IFD, odkiaľ $|AF| = |AS| = |AE|$. Z podobnosti trojuholníkov ASE, CDE dostávame $|\measuredangle SAE| = 180° - \alpha - \beta$, a teda $|\measuredangle BAS| + |\measuredangle ABC| = 180°$.

T-6. *Nech A, B, C, D, E sú také body, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník a $ABDE$ je rovnobežník. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v bode S a polpriamky AB a DC v bode F. Dokážte, že $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle ECD|$.* (*Chorvátsko*)

Riešenie. Označme M a N päty kolmíc spustených z bodu S na priamky AB a CD. Štvoruholník $SMFN$ je tetivový, lebo jeho dva protiľahlé uhly sú pravé (obr. 8). Z obvo-



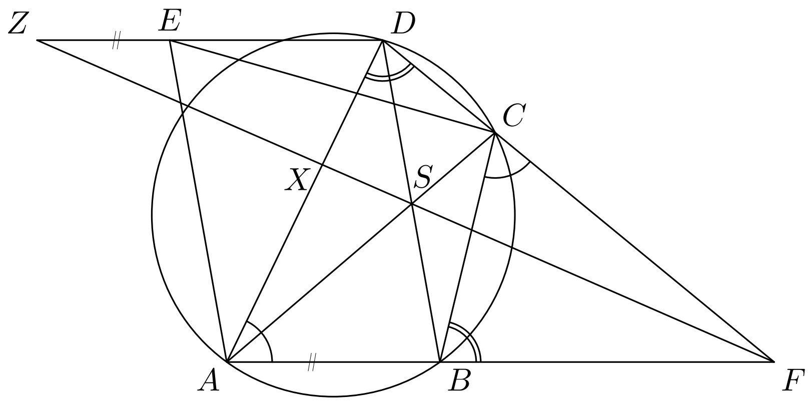
Obr. 8

dových uhlov teda $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle MNS|$. Potrebujeme dokázať, že $|\measuredangle MNS| = |\measuredangle ECD|$. Na to stačí ukázať podobnosť trojuholníkov MSN, EDC. Keďže štvoruholník $ABCD$ je tetivový, trojuholníky ABS, DCS sú podobné. Úsečky SM, SN sú výškami v týchto trojuholníkoch, preto $|SM| : |SN| = |AB| : |CD| = |ED| : |CD|$. Pre veľkosti uhlov navyše máme

$$\measuredangle MSN = 180^\circ - \measuredangle AFD = \measuredangle EDF = \measuredangle EDC,$$

takže trojuholníky MSN, EDC sú naozaj podobné.

Iné riešenie. Priamka FS pretína priamky AD, DE postupne v bodoch, ktoré označíme X, Z (obr. 9). Ďalej nech $|\measuredangle BAD| = \alpha$, $|\measuredangle ADF| = \delta$, $|AB| = a$, $|CD| = c$. Stačí dokázať, že trojuholníky CDE, ZDF sú podobné, pretože potom $|\measuredangle ECD| = |\measuredangle DZF| = |\measuredangle AFS|$. Tieto trojuholníky majú jeden uhol spoločný, takže ostáva ukázať, že $|ZD| : |FD| = c : a$.



Obr. 9

Podľa sínusovej vety v trojuholníku BFC platí $|CF| : |BF| = \sin\delta : \sin\alpha$, lebo

$$|\measuredangle FBC| = 180^\circ - |\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA| = \delta,$$
$$|\measuredangle FCB| = 180^\circ - |\measuredangle BCD| = |\measuredangle BAD| = \alpha.$$

Z Cèvovej vety pre trojuholník AFD a bod S vyplýva

$$1 = \frac{|DX|}{|AX|} \cdot \frac{|AB|}{|BF|} \cdot \frac{|CF|}{|DC|} = \frac{|DX|}{|AX|} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

Z podobnosti trojuholníkov AFX, DZX máme $|ZD| = |AF| \cdot |DX| / |AX|$, a zo sínusovej vety v trojuholníku AFD dostávame $|AF| = |FD| \cdot \sin\delta / \sin\alpha$. Takže pre skúmaný pomer $ZD : FD$ s využitím (1) platí

$$\frac{|ZD|}{|FD|} = \frac{|AF|}{|FD|} \cdot \frac{|DX|}{|AX|} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha} \cdot \frac{|DX|}{|AX|} = \frac{c}{a}.$$

T-7. *Pre celé nezáporné číslo n definujme a_n ako číslo, ktorého dekadický zápis má tvar*

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Dokážte, že $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet tretích mocnín dvoch celých kladných čísel, ale nikdy sa nedá vyjadriť ako súčet druhých mocnín dvoch celých čísel.

(*Švajčiarsko*)

Riešenie. Najskôr dokážeme, že $a_n/3$ nie je pre žiadne n súčtom dvoch štvorcov. Druhé mocniny dávajú po delení štyrmi iba zvyšky 0 a 1, takže čísla, ktoré sú súčtom dvoch štvorcov, môžu po delení štyrmi dávať iba zvyšok 0, 1 alebo 2. Ale $a_n/3$ dáva zvyšok 3, lebo a_n dáva zvyšok 1.[2]

Po chvíli skúšania nájdeme vzťah

$$\frac{a_n}{3} = \left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}\right)^3,$$

ktorý po triviálnej úprave vyplýva z vyjadrenia $a_n = 10^{3n+3} + 2\cdot 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1$. Obe čísla v zátvorkách sú prirodzené, lebo $10^{n+1} \equiv 1 \pmod 3$. Takže $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet dvoch tretích mocnín.

T-8. *Je dané celé kladné číslo n, ktoré nie je mocninou čísla 2. Ukážte, že existuje celé kladné číslo m s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:*

(i) m je súčinom dvoch po sebe idúcich celých kladných čísel;

(ii) dekadický zápis čísla m pozostáva z dvoch identických blokov n číslic.

(*Poľsko*)

Riešenie. Podľa Mihailescuho vety[3] jediným riešením rovnice $x^a - y^b = 1$ v obore celých čísel väčších ako 1 je $3^2 - 2^3 = 1$. Takže $10^n + 1$ nemôže byť druhou ani vyššou mocninou prvočísla. Podľa zadania má n aspoň jedného nepárneho deliteľa $k \geqq 3$. Ak $n = kl$, tak

$$10^n + 1 = (10^l)^k + 1 = (10^l + 1)\left((10^l)^{k-1} - (10^l)^{k-2} + \cdots - 10^l + 1\right),$$

teda $10^n + 1$ má netriviálneho deliteľa $10^l + 1$ a nemôže to byť prvočíslo. Z uvedeného vyplýva, že existujú nesúdeliteľné čísla a, b väčšie ako 1 také, že $10^n + 1 = ab$.

Našou úlohou je dokázať existenciu takého prirodzeného čísla t, s, že

$$m = (10^n + 1)t = abt = s(s-1),$$

pričom dekadický zápis t obsahuje presne n cifier.

Najskôr ukážeme, že existuje prirodzené číslo s deliteľné číslom a, pre ktoré $s \equiv$ $\equiv 1 \pmod b$. Čísla a, $2a$, $\ldots$, $(b-1)a$, ba sú všetky násobkami a a vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel a, b dávajú po delení b rôzne zvyšky. Preto práve jedno z nich dáva

[2] Inou možnosťou, ako určiť zvyšok $a_n/3$ po delení štyrmi, je uvedomiť si, že toto číslo pre $n \geqq 1$ vždy končí dvojčíslím 67.

[3] Známa je ako Catalanova hypotéza, dokázaná bola v roku 2002.

zvyšok 1 a môžeme ho zobrať za s. Podobne nájdeme s', ktoré je násobkom b a spĺňa $s' \equiv 1 \pmod{a}$.

Čísla s, s' sú kladné a menšie ako 10^n. Obe čísla $s(s-1)$ a $s'(s'-1)$ sú deliteľné číslom ab a menšie ako 10^{2n}. Navyše $s + s' \equiv 1 \pmod{ab}$. Číslo $s + s'$ je väčšie ako 1 a menšie ako $2 \cdot 10^n$. Nutne teda $s+s' = ab+1 = 10^n+2$, čiže aspoň jedno z čísel s, s' je väčšie ako $5 \cdot 10^{n-1}$, bez ujmy na všeobecnosti nech je to s. Potom $s(s-1) > 25 \cdot 10^{2n-2}$, takže $s(s-1)$ má presne $2n$ cifier a spĺňa všetky potrebné podmienky.