

70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7

1. Určte, ktorá cifra je na 1000. mieste za desatinnou čiarkou v desatinnom rozvoji čísla $\frac{9}{28}$.
(Marie Krejčová)

Nápad. Ako vyzerá desatinný rozvoj uvedeného čísla?

Riešenie. Desatinný rozvoj racionálneho čísla $\frac{9}{28}$ je

$$0,321\overline{42857},$$

pričom opakujúca sa časť, pozostávajúca zo šiestich cifier, je označená pruhom.

Šesť sa do tisíca vojde 166-krát a zvyššia štyri ($1000 = 166 \cdot 6 + 4$). Medzi desatinnou čiarkou a opakujúcou sa časťou sú dve cifry. Teda cifra na 1000. mieste za desatinnou čiarkou je rovnaká ako druhá cifra z opakujúcej sa časti, čo je cifra 4.

Poznámka. V riešení je podstatný iba zvyšok po delení 1000 číslom 6, a ten možno určiť bez úplného delenia nasledovne: Najväčšie číslo deliteľné 6 (tzn. deliteľné 2 a 3), ktoré je menšie ako 1000, je 996. Zvyšok po delení $1000 : 6$ je $1000 - 996 = 4$.

2. Kubo sa dohodol s bačom, že sa mu bude starať o ovce. Bača Kubovi sľúbil, že po roku služby dostane dvadsať zlatých a k tomu jednu ovcu. Lenže Kubo dal výpoveď práve vtedy, keď uplynul siedmy mesiac služby. Aj tak ho Bača spravodlivo odmenil a zaplatil mu päť zlatých a jednu ovcu. Na koľko zlatých si bača cenil jednu ovcu?
(Libuše Hozová)

Nápad. Na koľko zlatých si bača cenil Kubovu mesačnú prácu?

Riešenie. Kubovi ostávalo do konca roku 5 mesiacov a dostal zaplatené o 15 zlatých menej, ako by dostal po celom roku služby. To znamená, že ak by bol vyplatený iba v hotovosti, dostával by za každý mesiac 3 zlaté ($15 : 5 = 3$).

Za 7 mesiacov mal takto Kubo dostať 21 zlatých ($7 \cdot 3 = 21$). Dostal ale 5 zlatých a jednu ovcu, ovca má teda cenu 16 zlatých ($21 - 5 = 16$).

Iný nápad. Ako by mohla vyzeráť spravodlivá odmena za sedemročnú službu?

Iné riešenie. Máme dva spôsoby vyjadrenia jednej odmeny:

- 20 zlatých a 1 ovca za 12 mesiacov,
- 5 zlatých a 1 ovca za 7 mesiacov.

Ak tieto vyjadrenia prevedieme vzhľadom na rovnaký časový úsek, budeme vedieť určiť cenu ovce. Odmenu za sedem rokov (t.j. $7 \cdot 12$ mesiacov) služby môžeme vyjadriť dvojakým spôsobom:

- 140 zlatých a 7 oviec (t.j. sedemkrát prvá možnosť),
- 60 zlatých a 12 oviec (t.j. dvanásťkrát druhá možnosť).

V prvom prípade je odmena o 80 zlatých väčšia a o 5 oviec menšia ako v druhom. Teda 5 oviec stojí 80 zlatých a jedna ovca stojí 16 zlatých ($80 : 5 = 16$).

Poznámka. Ak zlaté označíme z a cenu ovce o , tak informácie zo zadania môžeme zapísať takto:

$$5z + o = \frac{7}{12}(20z + o).$$

Význačné číslo je najväčšie číslo odčítacej pyramídy. Výborná pyramída je odčítacia pyramída, ktorá má vo vrchole 0 a aspoň jeden riadok tvorený navzájom rôznymi číslami.

1. Koľko najmenej riadkov musí mať výborná pyramída?
2. Ktoré najmenšie význačné číslo môže byť obsiahnuté vo výbornej pyramíde s najmenším počtom riadkov?

(Katarína Jasenčáková)

Nápad. Ako vyzerá riadok pod vrcholom?

Riešenie. Ak je vo vrchole 0, musia byť v riadku pod ním dve rovnaké čísla. Každá výborná pyramída musí mať najmenej tri riadky.

Výborná pyramída s najmenším počtom riadkov a s najmenšími možnými číslami vyzerá (až na poradie čísel v treťom riadku) takto:

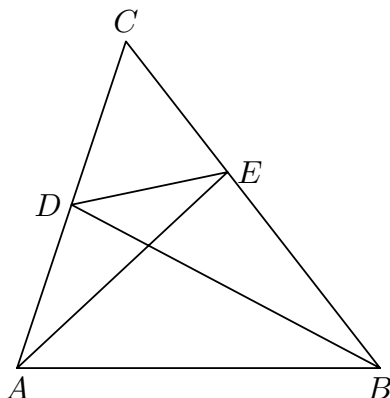
$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & 1 & & 1 \\ 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

Najväčšie číslo tejto pyramídy je 2, a to je tiež odpoveď na druhú otázku zo zadania úlohy.

Poznámka. Najvyššie tri poschodia odčítacej pyramídy s nulou vo vrchole vyzerajú (až na poradie čísel v treťom riadku) takto:

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & a & & a \\ b - a & & b & & b + a \end{array}$$

6. V trojuholníku ABC leží na strane AC bod D a na strane BC bod E . Veľkosti uhlov ABD , BAE , CAE a CBD sú postupne 30° , 60° , 20° a 30° . Určte veľkosť uhla AED .



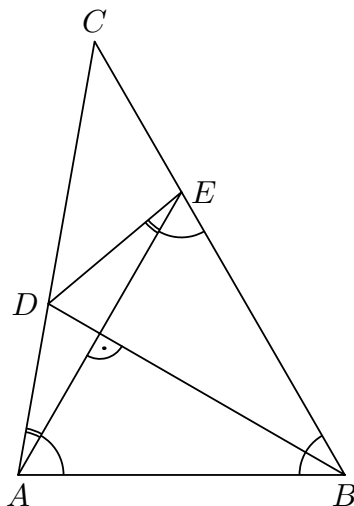
Poznámka: obrázok je iba ilustračný.

(Alžbeta Bohiniková)

Nápad. Hľadajte zhodné uhly.

Riešenie. Veľkosť uhla ABC je rovná súčtu veľkostí uhlov ABD a CBD , t.j. $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. V trojuholníku ABE majú dva vnútorné uhly veľkosť 60° , teda zvyšný uhol má tiež veľkosť 60° a trojuholník je rovnostranný.

Priamka BD je osou vnútorného uhla rovnostranného trojuholníka ABE , teda je aj jeho výškou. Preto body A a E sú súmerné podľa priamky BD . Úsečky AD a ED , resp. uhly EAD a AED sú preto zhodné. Veľkosť uhla AED je rovná 20° .



Poznámka. Podľa údajov zo zadania možno zostrojiť trojuholník ABC vrátane bodov D a E . To je vhodný začiatok pre odhalenie potrebných súvislostí. Riešenia založené na meraní z obrázka však nemožno považovať za vyhovujúce.

Pri tejto príležitosti pripomíname, že uhol 20° (rovnako ako veľa iných uhlov) sa nedá zostrojiť iba pomocou pravítka a kružidla.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Monika Dillingerová, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020