70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

---

1. *Myslím si päťciferné číslo, ktoré nie je deliteľné tromi ani štyrmi. Ak každú cifru zväčším o jedna, získam päťciferné číslo, ktoré je deliteľné tromi. Ak každú cifru o jedna zmenším, získam päťciferné číslo deliteľné štyrmi. Ak prehodím ľubovoľné dve cifry, číslo sa zmenší. Aké číslo si môžem myslieť? Nájdite všetky možnosti.* (Martin Mach)

Nápad. Viete dopredu vylúčiť niektoré cifry na jednotlivých miestach?

Riešenie. Vlastnosť s prehadzovaním cifier znamená, že každá cifra mysleného čísla je väčšia ako nasledujúca, resp. menšia ako predchádzajúca. Vlastnosť so zväčšením a zmenšením cifier znamená, že najväčšia cifra je menšia ako 9 a najmenšia cifra je väčšia ako 0. Celkom preto platí, že

1. cifra je menšia ako 9 a väčšia ako 4,
2. cifra je menšia ako 8 a väčšia ako 3,
3. cifra je menšia ako 7 a väčšia ako 2,
4. cifra je menšia ako 6 a väčšia ako 1,
5. cifra je menšia ako 5 a väčšia ako 0.

Vlastnosť s deliteľnosťou štyrmi znamená, že posledné dvojčíslie zmenšeného čísla je deliteľné štyrmi. To spolu s predchádzajúcimi podmienkami znamená, že posledné dvojčíslie mysleného čísla môže byť niektoré z nasledujúcich:

$$51, \quad 43, \quad 31.$$

Vlastnosť s deliteľnosťou tromi znamená, že súčet cifier zväčšeného čísla je deliteľný tromi, teda súčet cifier mysleného čísla dáva po delení tromi zvyšok jedna. Všetky možné mysliteľné čísla sú

$$87643, \quad 76543, \quad 87631, \quad 86431, \quad 76531, \quad 65431.$$

---

2. *Na záhrade stáli tri debny s jablkami. Spolu bolo jabĺk viac ako 150, avšak menej ako 190. Potom Marienka premiestnila z prvej debny do dvoch ďalších debien jablká tak, že sa ich počet v každej z týchto dvoch debien oproti predošlému stavu zdvojnásobil. Obdobným spôsobom Marta premiestnila jablká z druhej debny do prvej a tretej. Nakoniec Štefka podľa rovnakých pravidiel premiestnila jablká z tretej debny do prvej a druhej. Keď prišiel na záhradu Vojto, začudoval sa, že v každej debne bol rovnaký počet jabĺk. Koľko jabĺk bolo v jednotlivých debnách pôvodne?* (Libuše Hozová)

Nápad. V ktorej debne bolo po druhom preložení najviac jabĺk?

Riešenie. Po treťom preložení bol v každej debne rovnaký počet jabĺk, a ten si označíme x. Postupne odzadu doplníme počty jabĺk v jednotlivých debnách:

	1. debna	2. debna	3. debna
po 3. premiestnení	x	x	x
po 2. premiestnení	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$	$2x$
po 1. premiestnení	$\frac{1}{4}x$	$\frac{7}{4}x$	x
pôvodne	$\frac{13}{8}x$	$\frac{7}{8}x$	$\frac{1}{2}x$

Počty jabĺk po každom preložení v každej debne boli celočíselné. Teda x musí byť násobkom ôsmich a $3x$ (súčet jabĺk vo všetkých debnách) musí byť násobkom 24.

Medzi číslami 151 až 189 je jediný násobok čísla 24, a to 168. Teda $x = 168 : 3 = 56$ a v debnách pôvodne boli nasledujúce počty jabĺk:

$$\tfrac{13}{8} \cdot 56 = 91, \quad \tfrac{7}{8} \cdot 56 = 49, \quad \tfrac{1}{2} \cdot 56 = 28.$$

Poznámka. Ak by sme uvažovali odpredu, tak počty jabĺk v debnách možno postupne vyjadriť takto:

	1. debna	2. debna	3. debna
pôvodne	a	b	c
po 1. premiestnení	$a-b-c$	$2b$	$2c$
po 2. premiestnení	$2a-2b-2c$	$-a+3b-c$	$4c$
po 3. premiestnení	$4a-4b-4c$	$-2a+6b-2c$	$-a-b+7c$

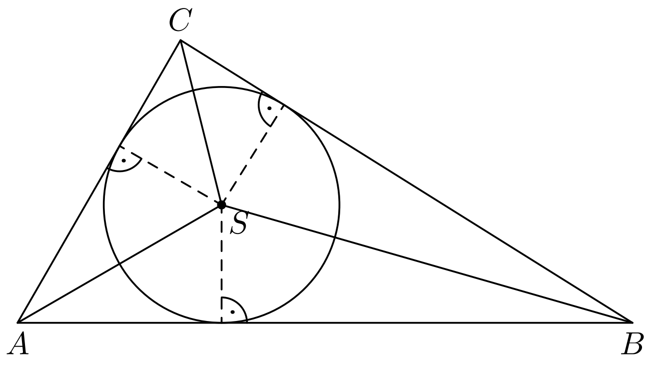
Rovnosť počtov jabĺk po treťom preložení vedie k sústave rovníc, ktorá je pre riešiteľa v tejto kategórii problematická. Avšak s predpokladmi celočíselnosti a, b, c a obmedzenosti súčtu $150 < a + b + c < 190$ má táto sústava jediné riešenie uvedené vyššie.

---

3. *V trojuholníku ABC je bod S stredom vpísanej kružnice. Obsah štvoruholníka $ABCS$ je rovný štyrom pätinám obsahu trojuholníka ABC. Dĺžky strán trojuholníka ABC vyjadrené v centimetroch sú všetky celočíselné a obvod trojuholníka ABC je 15 cm. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC. Nájdite všetky možnosti.* (Eva Semerádová)

Nápad. Viete určiť obsah trojuholníka pomocou jeho obvodu a polomeru kružnice vpísanej?

Riešenie. Trojuholník ABC možno rozložiť na trojuholníky ABS, BCS a ACS. Výška každého z týchto trojuholníkov z vrcholu S je zhodná s polomerom vpísanej kružnice. Pomery ich obsahov sú preto rovnaké ako pomery dĺžok strán oproti vrcholu S. Podobne možno porovnávať tieto čiastočné trojuholníky s celým trojuholníkom ABC (ktorého obsah je rovný súčinu obvodu a polomeru vpísanej kružnice).



Keďže obsah štvoruholníka $ABCS$ je rovný štyrom pätinám obsahu trojuholníka ABC, ostáva na trojuholník ACS jedna pätina obsahu trojuholníka ABC. Teda dĺžka strany AC je rovná pätine obvodu trojuholníka ABC, čo v našom prípade je $15 : 5 = 3$ (cm). Súčet dĺžok zvyšných dvoch strán je preto 12 cm; do úvahy pripadajú nasledujúce dvojice dĺžok strán (uvedené v cm, bez ohľadu na poradie):

$$1, 11; \quad 2, 10; \quad 3, 9; \quad 4, 8; \quad 5, 7; \quad 6, 6.$$

Aby uvažované úsečky tvorili strany trojuholníka, musia byť splnené trojuholníkové nerovnosti. Týmto požiadavkám vyhovujú iba nasledujúce trojice – možné dĺžky strán trojuholníka ABC v cm:

$$3, 5, 7; \quad 3, 6, 6.$$

---

4. *Jarka bola na brigáde s nemennou dennou mzdou. Za tri dni si zarobila toľko eur, že si kúpila stolovú hru a ešte jej 49 € zvýšilo. Keby strávila na brigáde päť dní, mohla by si kúpiť dve také stolové hry a ešte by jej zvýšilo 54 €. Koľko eur stála stolová hra?* (*Karel Pazourek*)

Nápad. Pátrajte najskôr po Jarkinej dennej mzde.

Riešenie. Za trojdňovú výplatu si Jarka kúpila jednu hru a zvýšilo jej 49 €, teda za šesťdennú výplatu by si mohla kúpiť dve hry a zvýšilo by jej 98 €. Pritom za päť dní by zarobila tiež na dve hry, ale zvýšilo by jej iba 54 €. Jarkina denná mzda preto bola 44 € ($98 - 54 = 44$).

Z prvého údaja dopočítame cenu jednej hry: $3 \cdot 44 - 49 = 83$ €.

Poznámka. Ak dennú výplatu označíme v a cenu hry h, tak možno predchádzajúce úvahy zhrnúť nasledovne:

- $3v = h + 49$, teda $6v = 2h + 98$,
- $5v = 2h + 54$, teda $v = 98 - 54 = 44$,
- $h = 3v - 49 = 3 \cdot 44 - 49 = 83$.

---

5. *Pán Strieborný usporiadal výstavu. Vystavoval 120 prsteňov, ktoré ležali na stoloch pozdĺž stien sály a tvorili tak jednu veľkú kružnicu. Prehliadka začínala pri vchodových dverách v označenom smere. Každý tretí prsteň v rade bol zlatý, každý štvrtý prsteň bol starožitný a každý desiaty prsteň mal diamant. Prsteň, ktorý nemal žiadnu z týchto troch vlastností, bol falzifikát. Koľko bolo na výstave zlatých prsteňov, ktoré boli starožitné a zároveň mali diamant? Koľko vystavil pán Strieborný falzifikátov?* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Podľa akých pravidiel boli rozmiestnené prstene s rôznymi kombináciami troch uvedených vlastností?

Riešenie. Každý 3. prsteň bol zlatý, každý 4. bol starožitný a každý 10. mal diamant. Teda

- zlatých prsteňov bolo $120 : 3 = 40$,
- starožitných prsteňov bolo $120 : 4 = 30$,
- prsteňov s diamantom bolo $120 : 10 = 12$.

Pri počítaní prsteňov s viacerými vlastnosťami najskôr určíme, s akou pravidelnosťou sa na výstave opakovali: každý 12. prsteň bol zlatý a starožitný, každý 30. bol zlatý s diamantom a každý 20. bol starožitný s diamantom (tu napr. 20 je najmenším spoločným násobkom čísel 4 a 10). Teda

- zlatých starožitných prsteňov bolo $120 : 12 = 10$,
- zlatých prsteňov s diamantom bolo $120 : 30 = 4$,
- starožitných prsteňov s diamantom bolo $120 : 20 = 6$.

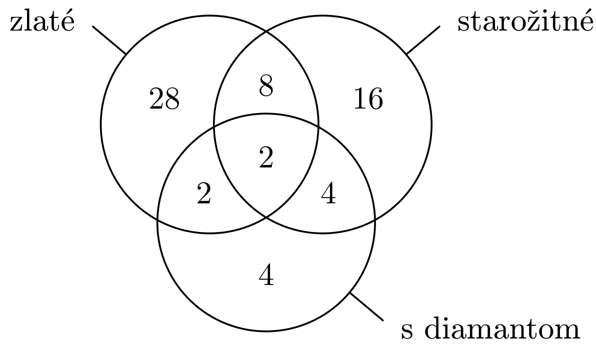
Ďalej každý 60. prsteň mal všetky tri vlastnosti (60 je najmenším spoločným násobkom čísel 3, 4 a 10), teda

- zlaté starožitné prstene s diamantom boli $120 : 60 = 2$.

Pri počítaní prsteňov s niektorou z uvedených vlastností musíme byť obozretní: 10 prsteňov bolo zlatých a starožitných, 2 z nich mali navyše diamant, teda zlatých starožitných prsteňov bez diamantu bolo $10 - 2 = 8$. Podobne zlatých nestarožitných prsteňov s diamantom bolo $4 - 2 = 2$ a nezlatých starožitných prsteňov s diamantom bolo $6 - 2 = 4$.

Zlatých prsteňov s nejakou dodatočnou vlastnosťou bolo $2 + 8 + 2 = 12$, pritom zlatých prsteňov celkom bolo 40, teda zlatých nestarožitných prsteňov bez diamantu bolo $40 - 12 = 28$. Podobne nezlatých starožitných prsteňov bez diamantu bolo $30 - (2 + 8 + 4) = 16$ a nezlatých nestarožitných prsteňov s diamantom bolo $12 - (2 + 2 + 4) = 4$.

Predchádzajúce počty a vzťahy môžeme znázorniť pomocou Vennovho diagramu takto:



Prsteňov s niektorou z troch sledovaných vlastností (teda prsteňov, ktoré neboli falzifikáty) bolo $2 + 8 + 4 + 2 + 28 + 16 + 4 = 64$. Falzifikátov preto bolo $120 - 64 = 56$.

Poznámka. Ak základné tri množiny prsteňov označíme Z, S a D, tak úvodnú časť predchádzajúceho riešenia možno zhrnúť nasledovne:

$$|Z| = 40, \quad |S| = 30, \quad |D| = 12,$$
$$|Z \cap S| = 10, \quad |Z \cap D| = 4, \quad |S \cap D| = 6,$$
$$|Z \cap S \cap D| = 2.$$

V ďalšej časti sme zisťovali počet prvkov zjednotenia $Z \cup S \cup D$ tak, že sme postupne vyjadrovali počty prvkov navzájom disjunktných* podmnožín $(Z \cap S) \setminus (Z \cap S \cap D)$,

* Disjunktné množiny sú množiny s prázdnym prienikom, teda množiny bez spoločného prvku.

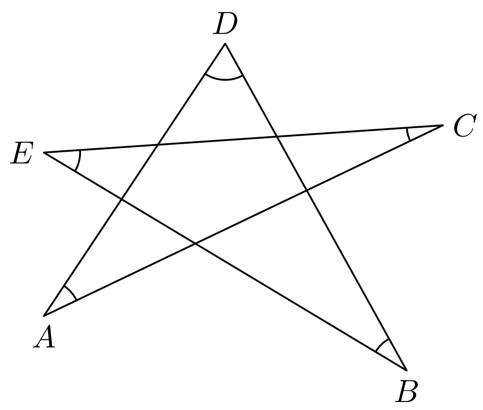
$(Z \cap D) \setminus (Z \cap S \cap D)$ atď., ktoré sme potom sčítali. Stručnejšie možno k tomu istému výsledku dospieť nasledujúcim výpočtom:

$$|Z \cup S \cup D| = |Z| + |S| + |D| - |Z \cap S| - |Z \cap D| - |S \cap D| + |Z \cap S \cap D| =$$
$$= 40 + 30 + 12 - 10 - 4 - 6 + 2 = 64.$$

Tomuto vzťahu sa hovorí *princíp inklúzie a exklúzie*. Na jeho všeobecné zdôvodnenie (príp. ďalšie zovšeobecnenie) stačí overiť, že každú z disjunktných častí Vennovho diagramu započítavame práve raz.

---

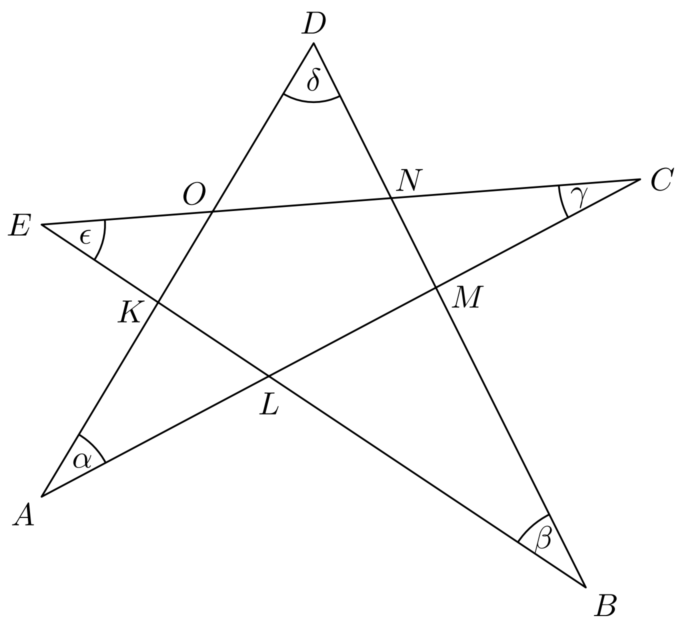
6. *Body A, B, C, D a E sú vrcholmi nepravidelnej päťcípej hviezdy, pozri obrázok. Určte súčet vyznačených uhlov.*



Poznámka: obrázok je iba ilustračný. (*Libuše Hozová*)

Nápad. Aký je súčet vnútorných uhlov v trojuholníku?

Riešenie. Pomocou vyznačených uhlov možno vyjadriť všemožné ďalšie uhly v danom mnohouholníku. Takto začneme a pokúsime sa zistiť niečo o hľadanom súčte. Vyznačené uhly a zvyšné vrcholy mnohouholníka označíme nasledovne:



Uhol LKO je vnútorným uhlom trojuholníka BKD, teda sa dá vyjadriť ako $180° - \beta - \delta$. Uhol LKA je susedným uhlom k uhlu LKO, resp. vonkajším uhlom trojuholníka BKD, teda je rovný $\beta + \delta$. Podobne uhol KLA je rovný $\gamma + \varepsilon$ atď.

Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku AKL je práve hľadaným súčtom vyznačených uhlov:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180°.$$

Poznámky. V predchádzajúcom riešení sme sa sústredili na vyjadrenie uhlov v cípe hviezdy s vrcholom A. Taký istý výsledok dostávame v ktoromkoľvek inom cípe.

Napriek tomu, že vyznačené uhly môžu byť veľmi rôznorodé, ich súčet je vždy rovnaký. To je dôsledkom podobne nesamozrejmého tvrdenia o súčte uhlov v trojuholníku. Toto tvrdenie bude určite v pozadí akéhokoľvek iného riešenia úlohy. Napr. je možné využiť súčet vnútorných uhlov všeobecného mnohouholníka: n-uholník možno rozdeliť (rôznymi spôsobmi) na $n-2$ trojuholníkov, teda súčet jeho vnútorných uhlov je $(n-2) \cdot 180°$.

Iné riešenie. Súčet vnútorných uhlov päťuholníka $KLMNO$ je rovný $3 \cdot 180° = 540°$. Podobne ako v riešení uvedenom vyššie možno vnútorné uhly pri vrcholoch K, L, M, N, O vyjadriť postupne ako

$$180° - \beta - \delta, \quad 180° - \gamma - \varepsilon, \quad 180° - \delta - \alpha, \quad 180° - \varepsilon - \beta, \quad 180° - \alpha - \gamma.$$

Celkom tak dostávame

$$\begin{aligned} 5 \cdot 180° - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) &= 540°, \\ 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) &= 360°, \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon &= 180°. \end{aligned}$$

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Monika Dillingerová, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020