

2020/2021
70. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 30. marca 2021.)

1. a) Dokážte nerovnosť $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b .

b) Nájdite najmenšie reálne číslo k také, aby nerovnosť $k(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 + ab$ platila pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b . (Ján Mazák)

2. Pre každé kladné celé číslo k označme d_k počet jednociferných deliteľov čísla k . Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí

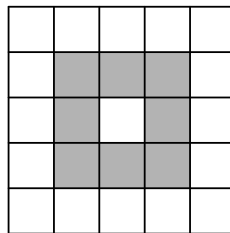
$$\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} < 3.$$

(Josef Tkadlec)

3. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C . Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D na preponu AB . Označme $E \neq D$ bod priamky p taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC . Dokážte, že $|AE| = |AF|$. (Jaroslav Švrček)

4. Na hracom pláne s rozmermi 9×9 štvorčekov je umiestnená loď tvorená ôsmimi štvorčekmi po obvodu štvorca 3×3 (na obr. 1 je vyznačená sivou farbou).

- Na koľko štvorčekov musíme vystreliť, aby sme mali istotu, že loď zasiahneme aspoň na dvoch rôznych miestach? O prvom zásahu sa pritom nedozvieme.
- Stačí rovnaký počet výstrelů aj pre hrací plán s veľkosťou 11×9 ?



Obr. 1

(Tomáš Bárta)