

2020/2021
70. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie C

(Súťaž sa konala v utorok 30. marca 2021.)

1. Určte všetky prirodzené čísla n , pre ktoré platí

$$n + p(n) = 70,$$

pričom $p(n)$ označuje súčin všetkých cifier čísla n .

(Jaroslav Švrček)

2. Určte, pre ktoré prirodzené čísla n možno štvorcovú tabuľku $n \times n$, ktorej políčka sú ofarbené ako políčka šachovnice, vyplniť číslami 2 a -1 tak, že súčasne platí:

- (i) súčet všetkých čísel v každom riadku aj v každom stĺpci tabuľky je rovný 0,
- (ii) súčet čísel na všetkých čiernych políčkach tabuľky sa rovná súčtu čísel na všetkých jej bielych políčkach.

(Martin Melicher)

3. Daný je trojuholník ABC , v ktorom D , E sú postupne stredy strán BC , AB . Nech F je stred úsečky BE a G vnútorný bod strany AC , pre ktorý platí $|AG| = 3|CG|$. Dokážte, že priesečník priamok DF a GE leží na tej rovnobežke s priamkou BC , ktorá prechádza bodom A .

(Patrik Bak)

4. Nech a , b sú ľubovoľné kladné reálne čísla, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = 1$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a^2(a + b^3)}{b - b^3} + \frac{b^2(b + a^3)}{a - a^3}$$

a určte, pre ktoré uvažované dvojice a , b je táto hodnota dosiahnutá. (Tomáš Bárta)