

70. ročník Matematickej olympiády  
2020/2021

## Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: [skmo.sk](http://skmo.sk). Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu [skmo@skmo.sk](mailto:skmo@skmo.sk) v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke [skmo.sk/dokument.php?id=429](http://skmo.sk/dokument.php?id=429) nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Štyri veveričky zjedli dokopy 2020 orieškov, každá najmenej 103 orieškov. Prvá veverička zjedla viac orieškov ako ktorákoľvek z ostatných troch veveričiek. Druhá a tretia veverička zjedli dokopy 1277 orieškov. Koľko orieškov zjedla prvá veverička?  
(Libuše Hozová)

**Riešenie.** Naznačíme možnosti, koľko orieškov mohla zjesť druhá a tretia veverička, t. j. číslo 1277 rozložíme na dva sčítance, z ktorých každý je rovný aspoň 103:

$$1277 = 1174 + 103 = \dots = 640 + 637 = 639 + 638.$$

Z toho vyplýva, že prvá veverička zjedla aspoň 640 orieškov (zjedla viac ako ktorákoľvek z ostatných veveričiek).

Na prvú a štvrtú veveričku dokopy zvýšilo  $2020 - 1277 = 743$  orieškov. Opäť naznačíme možnosti, koľko orieškov mohla zjesť prvá a štvrtá veverička:

$$743 = 640 + 103 = 639 + 104 = \dots$$

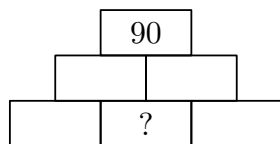
Z toho vyplýva, že prvá veverička zjedla nanaajviš 640 orieškov.

Prvá veverička zjedla práve 640 orieškov.

*Návrh hodnotenia.* Po 2 bodoch za každý z načrtnutých výpisov; 2 body za záver.

---

2. V súčinovej pyramíde je v každom políčku jedno kladné celé číslo, ktoré je súčinom čísel z dvoch susediacich políčok z nižšej vrstvy. Vo vrchole trojvrstvovej súčinovej pyramídy je číslo 90. Aké číslo môže byť vo vyznačenom políčku? Určte všetky možnosti. (Alžbeta Bohiniková)



**Riešenie.** Neznáme čísla v dolnej vrstve pyramídy označíme postupne  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . V druhej vrstve budú čísla  $ab$ ,  $bc$  a v hornej číslo  $ab^2c$ .

Úlohou je nájsť číslo  $b$  tak, aby  $ab^2c = 90$ , t.j. nájsť v rozklade čísla 90 druhú mocninu celého čísla. Prvočíselný rozklad čísla 90 je

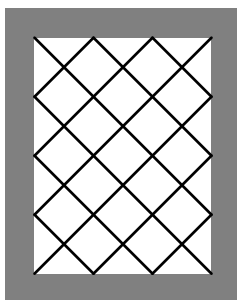
$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Teda vo vyznačenom políčku môže byť buď číslo 1, alebo 3.

*Návrh hodnotenia.* 2 body za úvahu opisujúcu číslo vo vrchole pyramídy v tvare  $ab^2c$ ; 2 body za rozklad čísla 90; 2 body za všetky riešenia.

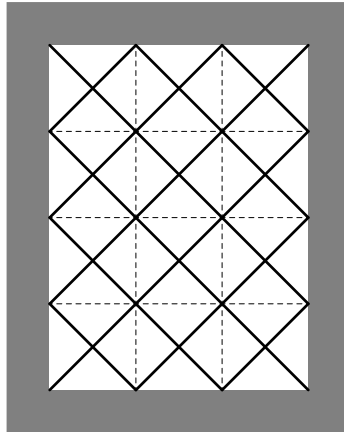
---

3. Dvierka králikárne sú vyrobené z dreveného rámu a drôteného pletiva so štvorcovými okami. Latky rámu sú široké 5 cm. Niektoré mrežové body pletiva sa nachádzajú presne na vnútorných hranách rámu ako na obrázku. Vnútorňá (pletivová) časť dvierok má obsah  $432 \text{ cm}^2$ . Určte vonkajšie rozmery (t.j. šírku a výšku) celých dvierok.



(Svetlana Bednářová)

**Riešenie.** Pletivová časť dvierok pozostáva zo zhodných štvorcov a ich polovic. Vnútorňé hrany rámu sú tvorené uhlopriečkami týchto štvorcov, a to tromi na kratšej strane a štyrmi na dlhšej. Ak je  $a$  dĺžka uhlopriečky štvorca, má pletivová časť rozmery  $3a \times 4a$ .



To zodpovedá obsahu  $432 \text{ cm}^2$ , teda

$$12a^2 = 432, \quad a^2 = 36, \quad a = 6.$$

Vnútorne rozmery dvierok sú  $18 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ , vonkajšie rozmery potom  $28 \text{ cm} \times 34 \text{ cm}$  (na každej strane pridaných  $5 \text{ cm}$ ).

*Poznámka.* Pletivovú časť dvierok tvorí 17 zhodných (celých) štvorcov a 14 polovic týchto štvorcov. Dokopy teda 24 štvorcov, ktoré majú obsah  $432 \text{ cm}^2$ . Na jeden štvorec tak pripadá  $18 \text{ cm}^2$ . Obsah štvorca s uhlopriečkou dĺžky  $a$  je rovný  $\frac{1}{2}a^2$ . Uhlopriečku pletivového štvorca možno teda určiť úpravami:

$$\frac{1}{2}a^2 = 18, \quad a^2 = 36, \quad a = 6.$$

*Návrh hodnotenia.* 2 body za pomocné rozklady a úvahy; 2 body za pomocné výpočty; 2 body za záver a kvalitu komentára.

---

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, Tomáš Sásik, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Erika Novotná

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021