

2010/2011
60. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 18. januára 2011.)

1. Rozhodnite, či medzi všetkými osemcifernými násobkami čísla 4 je viac tých, ktoré vo svojom dekadickom zápise obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré cifru 1 neobsahujú. (Ján Mazák)
2. Daný je trojuholník ABC s obsahom S . Vnútri trojuholníka, ktorého vrcholmi sú stredy strán trojuholníka ABC , je ľubovoľne zvolený bod O . Označme A' , B' , C' postupne obrazy bodov A , B , C v stredovej súmernosti podľa bodu O . Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$. (Pavel Leischner)
3. Určte všetky dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo $4(mn+1)$ deliteľné číslom $(m+n)^2$. (Tomáš Jurík)
4. Nech M je množina šiestich navzájom rôznych kladných celých čísel, ktorých súčet je 60. Všetky ich napíšeme na steny kocky, na každú práve jedno z nich. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné tri steny kocky, ktoré majú spoločný vrchol, a každé z čísel na týchto troch stenách zväčšíme o 1. Určte počet všetkých takých množín M , ktorých čísla možno napísať na steny kocky uvedeným spôsobom tak, že po konečnom počte vhodných krokov budú na všetkých stenách rovnaké čísla. (Peter Novotný)