

70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Na rozprávkovom ostrove žijú draci a kyklopi. Všetci draci sú červení, trojhlaví a dvojnohí. Všetci kyklopi sú hnedí, jednohlaví a dvojnohí. Kyklopi majú jedno oko uprostred čela, draci majú na každej hlave dve oči. Dokopy majú kyklopi a draci 42 očí a 34 nôh. Koľko drakov a koľko kyklopov žije na ostrove? (Michaela Petrová)

Riešenie. Keďže ako kyklopi, tak draci sú dvojnohí, všetkých týchto bytostí je celkom 17 ($34 : 2 = 17$).

Keby všetky bytosti boli kyklopi, mali by celkom 17 očí. To je o 25 menej, než koľko ich je v skutočnosti ($42 - 17 = 25$).

Každý drak má o 5 očí viac ako ktorýkoľvek kyklop, teda medzi bytosťami je 5 drakov ($25 : 5 = 5$). Zvyšných 12 bytostí sú kyklopi ($17 - 5 = 12$).

Iné riešenie. Úlohu možno riešiť aj skúšaním možností: celkom je na ostrove 17 bytostí ($34 : 2 = 17$), medzi ktorými je najviac 7 drakov ($42 : 6 = 7$).

V nasledujúcej tabuľke uvádzame v závislosti od počtu drakov (d) počet kyklopov ($k = 17 - d$) a celkový počet ich očí ($6d + k = 5d + 17$), ktorý má byť 42:

draci	1	2	3	4	5	6	7
kyklopi	16	15	14	13	12	11	10
celkom očí	22	27	32	37	42	47	52

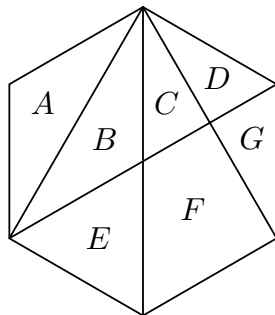
Jediné vyhovujúce riešenie je vyznačené silno.

Poznámka. S označením uvedeným v opise predchádzajúcej tabuľky možno počet drakov určiť ako riešenie rovnice $5d + 17 = 42$ (čo tiež zodpovedá úvahám v prvom riešení úlohy).

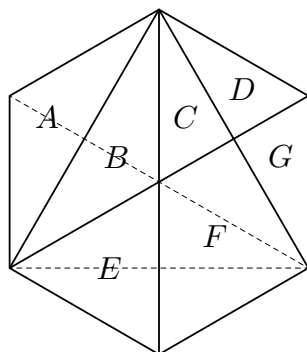
Skúšanie je možné založiť na inom princípe, pričom nie je nutné poznať počet bytostí na ostrove (zato uvažovať počty nôh).

Návrh hodnotenia. 2 body za čiastočné postrehy (napr. celkový počet bytostí či maximálny počet drakov); 3 body za doriešenie úlohy; 1 bod za úplnosť a kvalitu komentára.

2. Pravidelný šesťuholník je štyrmi svojimi uhlopriečkami rozdelený na šesť trojuholníkov a jeden štvoruholník ako na obrázku. Obsah štvoruholníka F je $1,8 \text{ cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov A , B , C , D , E a G . (Eva Semerádová)



Riešenie. Doplnením chýbajúcich uhlopriečok šesťuholníka získame jeho rozdelenie na 12 navzájom zhodných trojuholníkov (uhlopriečky prechádzajúce stredom šesťuholníka ho rozdeľujú na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov, zvyšné tri uhlopriečky predstavujú výšky v týchto trojuholníkoch).



Trojuholníky C , D , G sú tri z týchto základných trojuholníkov, každý z trojuholníkov A , B , E je tvorený dvoma základnými trojuholníkmi a štvoruholník F tromi.

Obsah štvoruholníka F je $1,8 \text{ cm}^2$, teda obsah základného trojuholníka je $0,6 \text{ cm}^2$. Každý z trojuholníkov C , D , G má obsah $0,6 \text{ cm}^2$ a každý z trojuholníkov A , B , E má obsah $1,2 \text{ cm}^2$.

Návrh hodnotenia. 3 body za pomocné delenie šesťuholníka a porovnanie posudzovaných častí; 2 body za doriešenie úlohy; 1 bod za kvalitu komentára (zahŕňajúcu najmä zhodnosti pomocných trojuholníkov).

3. Bludička Jozefína tancuje pri močiari, pričom používa kroky dvojakej dĺžky – krátke merajú 45 cm , dlhé 60 cm . Časom si vyšliapala oválny chodník, po ktorom za dlhých nocí tancuje stále dokola. Ak opakuje tri dlhé kroky dopredu a jeden krátky vzad, tak deväťdesiatym krokom dotancuje presne tam, kde začínala. Ak opakuje tri krátke kroky dopredu a jeden dlhý vzad, tak jej tiež vychádza krok presne tam, kde začínala. Koľkým krokom dotancuje Jozefína na pôvodné miesto v druhom prípade? (Michaela Petrová)

Riešenie. Jedným veľkým štvorkrokom (tromi dlhými krokmi vpred a jedným krátkym vzad) sa Jozefína posunie o 135 cm ($3 \cdot 60 - 45 = 135$). Deväťdesiat krokov pozostáva

z 22 veľkých štvorkrokov a dvoch dlhých krokov ($90 = 22 \cdot 4 + 2$). Jozefínin okruh teda meria 3 090 cm ($22 \cdot 135 + 2 \cdot 60 = 3\,090$).

Jedným malým štvorkrokom (tromi krátkymi krokmi vpred a jedným dlhým vzad) sa Jozefína posunie o 75 cm ($3 \cdot 45 - 60 = 75$). Štyridsať takých štvorkrokov – teda 160 krokov – ju posunie o 3 000 cm ($40 \cdot 75 = 3\,000$), pričom takto určite neprekročí pôvodné miesto (pred posledným spiatočným krokom je vo vzdialenosti 3 060 cm). Zvyšných 90 cm prejde dvoma nasledujúcimi krokmi ($2 \cdot 45 = 90$).

Jozefína dotancuje na pôvodné miesto 162. krokom.

Poznámka. Pre priblíženie situácie uvádzame niekoľko vzdialeností (v cm) prislúchajúcich tanečným krokom používaným v druhom prípade:

krok	1	2	3	4	5	6	...
vzdialenosť	45	90	135	75	120	165	...

krok	...	158	159	160	161	162	163
vzdialenosť	...	3 015	3 060	3 000	3 045	3 090	3 135

Z toho je tiež zrejmé, že rôznym krokom zodpovedajú rôzne vzdialenosti.

Návrh hodnotenia. 2 body za dĺžku Jozefíninho okruhu; 2 body za počet krokov v druhom prípade; 2 body za zrozumiteľnosť a kvalitu komentára.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, Tomáš Sásik, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Erika Novotná

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021