70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8*

<u>Informácia pre okresnú komisiu MO:</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

---

1. *Deti na tábore získavali za splnené úlohy body. Tie bolo možné ďalej meniť: päť bodov za samolepku, šesť bodov za pečiatku. Jaro si prepočítal, že keby chcel len samolepky, zvýšil by mu jeden bod nevyužitý. Keby si vybral len pečiatky, nevyužil by tri body. Nakoniec dokázal uplatniť všetky svoje body, pričom získal dvojnásobné množstvo pečiatok ako samolepiek. Koľko najmenej bodov mohol mať Jaro pred menením?*

(Eva Semerádová)

Riešenie. Uvažujeme počty samolepiek a pečiatok vyhovujúce poslednej uvedenej podmienke, potom kontrolujeme ostatné požiadavky:

Jednu samolepku a dve pečiatky možno získať za 17 bodov ($5 + 2 \cdot 6 = 17$). Pri zmene 17 bodov len za samolepky by sa dva body nevyužili (zvyšok po delení $17 : 5$ je 2), čo nesúhlasí so zadaním.

Pre s samolepiek máme $2s$ pečiatok a $17s$ bodov. Hľadáme najmenšie s také, že $17s$ dáva po delení piatimi zvyšok jedna a po delení šiestimi zvyšok tri:

samolepky	1	2	3
pečiatky	2	4	6
body	17	34	**51**
zvyšok po del. 5	2	4	1
zvyšok po del. 6	5	4	3

Jaro mal pred menením najmenej 51 bodov.

Iné riešenie. Uvažujeme počty samolepiek a pečiatok vyhovujúce prvým dvom podmienkam, potom kontrolujeme ostatné požiadavky:

Pri menení bodov len za samolepky by sa jeden bod nevyužil; možné počty sú (násobky piatich zväčšené o jedna)

$$6,\ 11,\ 16,\ \mathbf{21},\ 26,\ 31,\ 36,\ 41,\ 46,\ \mathbf{51},\ \ldots$$

Pri menení bodov len za pečiatky by sa tri body nevyužili; možné počty sú (násobky šiestich zväčšené o tri)

$$9,\ 15,\ \mathbf{21},\ 27,\ 33,\ 39,\ 45,\ \mathbf{51},\ \ldots$$

Hodnoty vyhovujúce obom požiadavkám súčasne sú vyznačené silno.

Bezo zvyšku možno 21 bodov zmeniť jedine za tri samolepky a jednu pečiatku ($21 = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6$). V takom prípade by nebolo pečiatok dvojnásobné množstvo ako samolepiek.

Bezo zvyšku možno 51 bodov zmeniť buď za tri samolepky a šesť pečiatok, alebo za deväť samolepiek a jednu pečiatku ($51 = 3 \cdot 5 + 6 \cdot 6 = 9 \cdot 5 + 6$). V prvom prípade je pečiatok dvojnásobné množstvo ako samolepiek.

Jaro mal pred menením najmenej 51 bodov.

Poznámka. Vyššie diskutované podmienky pre neznámy počet bodov sú:

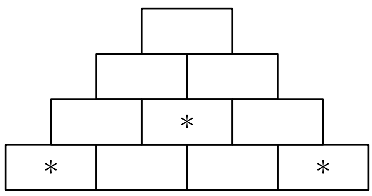
- zvyšok po delení piatimi je jedna,
- zvyšok po delení šiestimi je tri,
- zvyšok po delení sedemnástimi je nula.

Všetky prirodzené čísla vyhovujúce týmto trom podmienkam sú tvaru $51 + 5 \cdot 6 \cdot 17 \cdot k = 51 + 510k$, pričom k je ľubovoľné nezáporné celé číslo. Úloha súvisí s tzv. *čínskou vetou o zvyškoch.*

Návrh hodnotenia. 2 body za nájdenie systému preverovania možností (násobky 17 v prvom riešení, správne zvyšky v druhom riešení); 2 body za doriešenie úlohy; 2 body za úplnosť a kvalitu komentára.

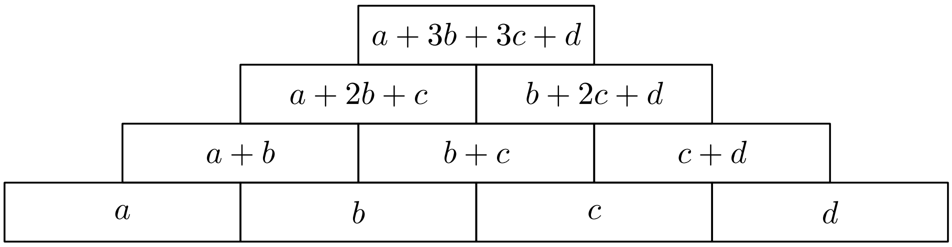
---

2. *Eliška umiestňovala koláče do škatúľ, z ktorých potom postavila pyramídu ako na obrázku. Pritom každá škatuľa vo vyššom rade obsahovala toľko koláčov ako dve susediace škatule pod ňou dokopy. V troch škatuliach označených hviezdičkami bolo tri, päť a šesť koláčov. Eliška si všimla, že keby označené škatule akokoľvek zamenila a podľa predchádzajúceho pravidla upravila počty koláčov v ostatných škatuliach, celkový počet koláčov by sa nezmenšil. Koľko koláčov bolo v označenej škatuli v druhom rade zdola?*



(*Libuše Hozová*)

Riešenie. Počty koláčov v dolnom rade pyramídy označíme postupne a, b, c, d a z toho vyjadríme počty v ostatných škatuliach:



Súčet všetkých uvedených čísel je

$$4a + 9b + 9c + 4d = 4(a + d) + 9(b + c).$$

Čísla v škatuliach označených hviezdičkami sú a, d a $b + c$, čo sú (až na poradie) čísla 3, 5 a 6. Celkový súčet je najmenší možný práve vtedy, keď číslo $b + c$ (t. j. číslo prispievajúce do súčtu najväčšou váhou) je najmenšie možné, teda 3.

V označenej škatuli v druhom rade zdola boli tri koláče.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj rozborom všetkých možných rozmiestnení známych počtov koláčov. Vzhľadom na zrejmé symetrie stačí uvažovať tri prípady:

- $a = 3$, $d = 5$, $b + c = 6$, čo dáva celkový súčet 86,
- $a = 3$, $d = 6$, $b + c = 5$, čo dáva celkový súčet 81,
- $a = 5$, $d = 6$, $b + c = 3$, čo dáva celkový súčet 71.

Najmenší súčet nastáva v treťom prípade, čo súhlasí s predchádzajúcimi závermi.

Návrh hodnotenia. 3 body za všeobecné doplnenie pyramídy, resp. rozbor možností; 3 body za doriešenie úlohy.

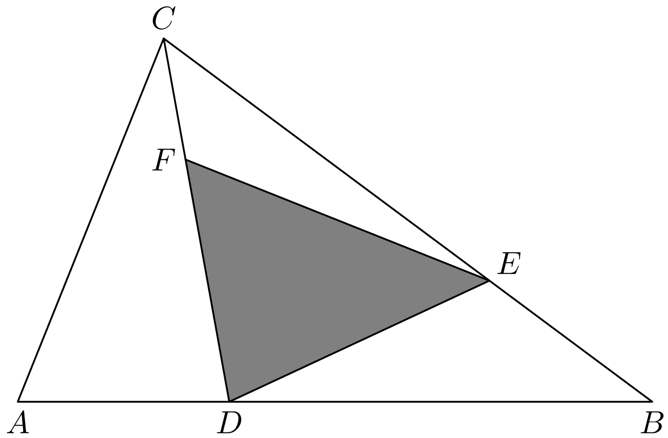
---

3. *Pre všeobecný trojuholník ABC sú dané body D, E, F:*

- *bod D je v tretine úsečky AB, bližšie k bodu A,*
- *bod E je v tretine úsečky BC, bližšie k bodu B,*
- *bod F je v tretine úsečky CD, bližšie k bodu C.*

Určte pomer obsahov trojuholníkov ABC a DEF. (*Alžbeta Bohiniková*)

Riešenie. Kvôli prehľadnosti situáciu najskôr znázorníme:



Trojuholníky ABC a DBC majú rovnakú výšku z vrcholu C a protiľahlé strany (AB a DB) sú v pomere 3 : 2. V rovnakom pomere sú tiež ich obsahy,

$$S_{ABC} : S_{DBC} = 3 : 2.$$

Trojuholníky BCD a ECD majú rovnakú výšku z vrcholu D a protiľahlé strany (BC a EC) sú v pomere 3 : 2. V rovnakom pomere sú tiež ich obsahy, čo spolu s predchádzajúcim výsledkom dáva

$$S_{ABC} : S_{ECD} = 9 : 4.$$

Trojuholníky CDE a FDE majú rovnakú výšku z vrcholu E a protiľahlé strany (CD a FD) sú v pomere 3 : 2. V rovnakom pomere sú tiež ich obsahy, čo spolu s predchádzajúcimi výsledkami dáva

$$S_{ABC} : S_{DEF} = 27 : 8.$$

Návrh hodnotenia. 1 bod za znázornenie situácie; po 1 bode za každé z čiastočných pozorovaní; 2 body za záver a kvalitu komentára.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, Tomáš Sásik, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Katarína Buzáková, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Erika Novotná
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021