2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Rozhodnite, či medzi všetkými osemcifernými násobkami čísla 4 je viac tých, ktoré vo svojom dekadickom zápise obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré cifru 1 neobsahujú.* (Ján Mazák)

Riešenie. Najskôr určíme počet u všetkých osemciferných čísel deliteľných štyrmi. Každé také číslo má vo svojom zápise na prvom mieste zľava nenulovú cifru. Máme tak 9 možností. Na nasledujúcich piatich miestach má ľubovoľnú cifru desiatkovej sústavy, t. j. pre každú pozíciu máme 10 možností, a končí dvojčíslím, ktoré je deliteľné štyrmi, t. j. 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, …, 96, celkom teda 25 možností. Preto

$$u = 9 \cdot 10^5 \cdot 25 = 22\,500\,000.$$

Podobnú úvahu možno urobiť aj pri hľadaní počtu v všetkých osemciferných čísel deliteľných štyrmi, ktoré vo svojom desiatkovom zápise *neobsahujú* cifru 1. Pre prvú pozíciu zľava máme teraz 8 možností a pre každú ďalšiu z piatich nasledujúcich pozícií máme 9 možností. Na posledných dvoch miestach sprava musí byť dvojčíslie deliteľné štyrmi, ktoré však neobsahuje cifru 1. Sú to všetky dvojčíslia z predchádzajúceho odseku okrem 12 a 16, teda 23 možností. Preto

$$v = 8 \cdot 9^5 \cdot 23 = 10\,865\,016.$$

Záver. Keďže $u > 2v$, je medzi osemcifernými násobkami čísla 4 viac tých, ktoré vo svojom (desiatkovom) zápise cifru 1 obsahujú, ako tých, ktoré ju neobsahujú.

Poznámka. Počet u všetkých osemciferných násobkov čísla 4 možno určiť aj jednoduchou úvahou: najmenší násobok je $A = 10\,000\,000$, najväčší je $B = 99\,999\,996$, takže hľadaný počet je $\frac{1}{4}(B - A) + 1 = \frac{1}{4}(B + 4 - A) = 22\,500\,000$.

Na dôkaz nerovnosti $u > 2v$ nie je nutné v vyčísliť, pretože podiel

$$\frac{u}{v} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 25}{8 \cdot 9^5 \cdot 23} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23}$$

sa dá dobre odhadnúť pomocou binomickej vety

$$\left(\frac{10}{9}\right)^5 = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^5 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9^2} = \frac{136}{81} = \frac{8 \cdot 17}{9^2},$$

takže

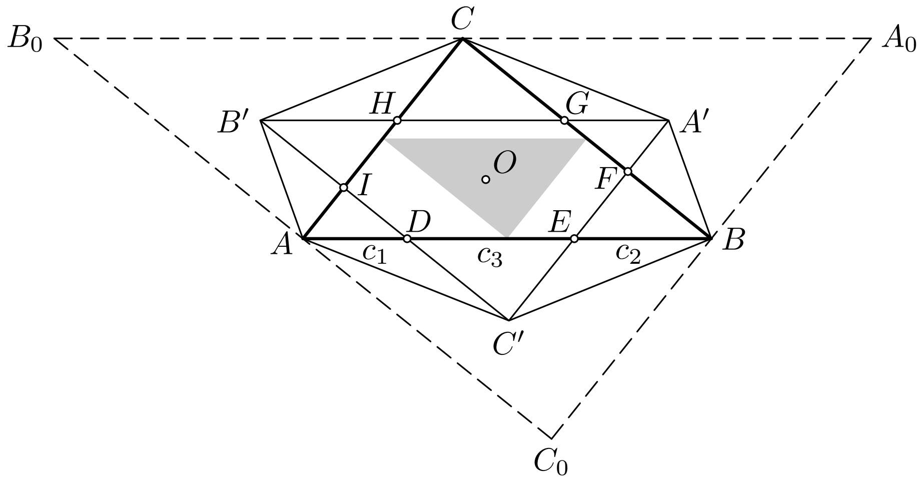
$$\frac{u}{v} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23} > \frac{9}{8} \cdot \frac{8 \cdot 17}{9^2} \cdot \frac{25}{23} = \frac{17 \cdot 25}{9 \cdot 23} = \frac{425}{207} > 2.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za správne vyjadrenie u, 3 body za správne vyjadrenie v a 1 bod za dôkaz nerovnosti $u > 2v$ alebo nerovnosti s ňou ekvivalentnou. Za numerické chyby pri výpočte strhnite nanajvýš 1 bod.

2. *Daný je trojuholník ABC s obsahom S. Vnútri trojuholníka, ktorého vrcholmi sú stredy strán trojuholníka ABC, je ľubovoľne zvolený bod O. Označme A', B', C' postupne obrazy bodov A, B, C v stredovej súmernosti podľa bodu O. Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Označme $\mathcal{U}$ trojuholník s vrcholmi v stredoch strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC. Obsah trojuholníka XYZ budeme označovať S_{XYZ}.

Keďže body A', B', C' sú zároveň obrazmi bodu O v rovnoľahlostiach so stredmi v zodpovedajúcich vrcholoch trojuholníka ABC a koeficientom 2, vyplýva z predpokladu úlohy, že body A', B', C' ležia postupne vnútri trojuholníkov A_0CB, CB_0A a BAC_0 (to sú obrazy trojuholníka $\mathcal{U}$ v uvedených rovnoľahlostiach, na obr. 1 je $\mathcal{U}$ vyznačený sivou farbou). Hranica trojuholníka $A'B'C'$ teda pretne strany AB, BC, CA postupne v ich vnútorných bodoch D, E, F, G, H, I.



Obr. 1

Keďže trojuholník $A'B'C'$ je obrazom trojuholníka ABC v stredovej súmernosti podľa stredu O, sú navzájom si zodpovedajúce strany rovnobežné a v tej istej súmernosti si zodpovedajú dvojice bodov D a G, E a H aj F a I. Preto podľa vety *uu* je každý z trojuholníkov ADI, EBF, HGC podobný trojuholníku ABC. Označme k_1, k_2, k_3 koeficienty podobností, ktoré zobrazia trojuholník ABC postupne na trojuholníky ADI, EBF, HGC. Obrazy trojuholníkov ADI, EBF, HGC v stredovej súmernosti podľa stredu O sú postupne trojuholníky $A'GF$, $HB'I$, EDC'. Tie sú tiež podobné s trojuholníkom ABC, pričom zodpovedajúce koeficienty podobností, ktoré na ne zobrazia trojuholník ABC, sú opäť k_1, k_2, k_3. Ak označíme c dĺžku strany AB, platí pre dĺžky úsekov na strane AB

$$c_1 = |AD| = k_1 c, \quad c_2 = |EB| = k_2 c, \quad c_3 = |DE| = k_3 c,$$

takže

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = k_1 c + k_2 c + k_3 c = (k_1 + k_2 + k_3)c, \quad \text{odkiaľ} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Z podobnosti trojuholníkov ABC a EDC' ďalej vyplýva, že veľkosť výšky z vrcholu C' na stranu AB v trojuholníku ABC' je rovná $k_3 v_c$, pričom v_c je veľkosť výšky z vrcholu C

v trojuholníku ABC. Preto

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2}c \cdot k_3 v_c = k_3\Big(\frac{1}{2}cv_c\Big) = k_3 S.$$

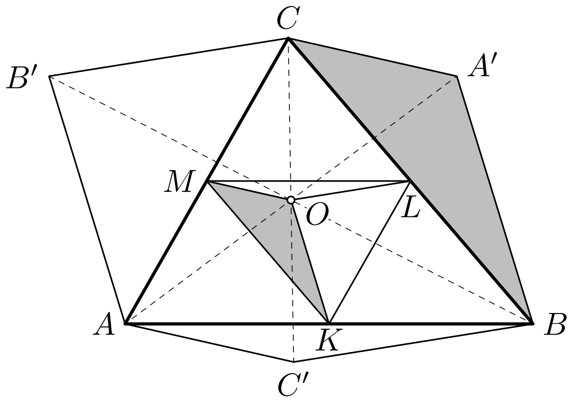
Analogicky $S_{BCA'} = k_1 S$ a $S_{CAB'} = k_2 S$. Pre obsah S' šesťuholníka $AC'BA'CB'$ tak platí

$$S' = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{CAB'} + S_{ABC'} = (1 + k_1 + k_2 + k_3)S = 2S.$$

Iné riešenie. Označme K, L, M stredy strán AB, BC, CA. Rovnoľahlosť so stredom A a koeficientom 2 zobrazí trojuholník MKO na trojuholník CBA' (obr. 2), preto $S_{CBA'} = 4 \cdot S_{MKO}$. Podobne $S_{ACB'} = 4 \cdot S_{KLO}$ a $S_{BAC'} = 4 \cdot S_{LMO}$. Odtiaľ

$$S_{CBA'} + S_{ACB'} + S_{BAC'} = 4 \cdot S_{KLM} = S,$$

a teda šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.



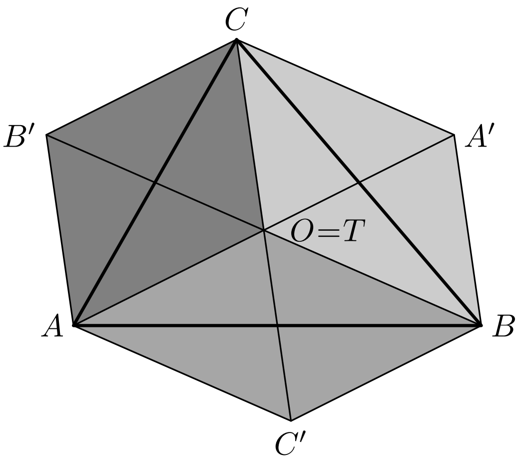
Obr. 2

Iné riešenie. Ak je bod O totožný s ťažiskom T trojuholníka ABC ($O = T$), je tvrdenie úlohy splnené, lebo $S_{A'BC} = S_{TBC}$, $S_{B'CA} = S_{TCA}$ a $S_{C'AB} = S_{TAB}$ (obr. 3).

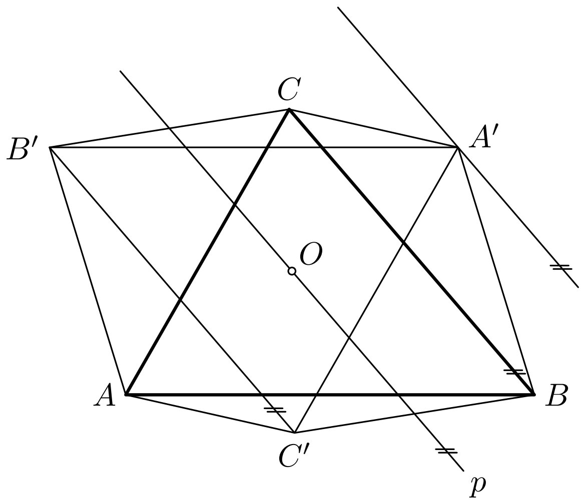
Predpokladajme teraz, že bod O sa pohybuje vnútri trojuholníka $\mathcal{U}$ po priamke p rovnobežnej so stranou BC. Ukážeme, že sa pritom obsah šesťuholníka $AC'BA'CB'$ nemení. Body A', B' a C' ležia na rovnobežkách s priamkou p, preto sa nemení obsah trojuholníka $A'BC$ ani obsahy rovnobežníka $BCB'C'$ a trojuholníka $B'C'A$ (obr. 4). Obsah šesťuholníka $AC'BA'CB'$ teda od polohy bodu O na priamke p nezávisí. Podobne možno ukázať, že sa obsah šesťuholníka $AC'BA'CB'$ nemení, ani keď sa bod O pohybuje po rovnobežke so stranou AC.

Ľubovoľný vnútorný bod O trojuholníka $\mathcal{U}$ pritom získame ako obraz ťažiska T trojuholníka ABC v zobrazení zloženom z dvoch posunutí, a to z posunutia v smere rovnobežnom so stranou BC a z posunutia v smere rovnobežnom so stranou AC. Preto pre každý bod O vnútri trojuholníka $\mathcal{U}$ má šesťuholník $AC'BA'CB'$ rovnaký obsah ako šesťuholník zodpovedajúci bodu $O = T$, teda obsah $2S$, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme O' ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC. Keďže obsah skúmaného šesťuholníka je rovný súčtu obsahov troch štvoruholníkov $AC'BO'$, $BA'CO'$



Obr. 3



Obr. 4

a $CB'AO'$, bude tvrdenie úlohy zrejme platiť, ak dokážeme bod O' vybrať tak, aby všetky tri spomenuté štvoruholníky boli rovnobežníky. Keďže

$$O = \frac{A + A'}{2} = \frac{B + B'}{2} = \frac{C + C'}{2},$$

majú body A', B', C' vyjadrenia

$$A' = 2O - A, \quad B' = 2O - B, \quad C' = 2O - C,$$

takže potrebné rovnosti

$$\frac{A + B}{2} = \frac{C' + O'}{2}, \quad \frac{B + C}{2} = \frac{A' + O'}{2}, \quad \frac{C + A}{2} = \frac{B' + O'}{2}$$

budú splnené práve vtedy, keď bod O' bude mať vyjadrenie $O' = A + B + C - 2O$, čiže $O' = 3T - 2O$, pričom $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$ je ťažisko trojuholníka ABC. Odvodená rovnosť zapísaná v tvare $O' - T = 2(T - O)$ znamená, že želaný bod O' je určený ako obraz bodu O v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2. V nej je však obrazom trojuholníka $\mathcal{U}$ pôvodný trojuholník ABC, takže vnútorný bod O trojuholníka $\mathcal{U}$ sa naozaj zobrazí na vnútorný bod O' trojuholníka ABC, ako sme potrebovali dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za uvedenie (a zdôvodnenie) akýchkoľvek čiastočných výsledkov, ktoré vedú na úplné riešenie úlohy, dajte v súčte najviac 4 body.

---

3. *Určte všetky dvojice* (m, n) *kladných celých čísel, pre ktoré je číslo* $4(mn+1)$ *deliteľné číslom* $(m + n)^2$. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Najskôr si uvedomme, že s každou dvojicou (m, n) prirodzených čísel, ktorá úlohe vyhovuje, jej vyhovuje aj dvojica (n, m). Preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $m \geqq n$.

Ak prirodzené číslo $A = (m + n)^2$ delí prirodzené číslo $B = 4(mn + 1)$, nutne platí

$$(m + n)^2 \leqq 4(mn + 1), \qquad \text{čiže} \qquad (m - n)^2 \leqq 4.$$

Preto $0 \leqq m - n \leqq 2$. Nastane teda práve jedna z troch nasledujúcich možností:

- ▷ $m = n$, potom $A = 4n^2$, $B = 4n^2 + 4$ a A delí B práve vtedy, keď $4n^2$ delí 4, teda $n = 1$. Dostávame jedno riešenie $(m, n) = (1, 1)$.
- ▷ $m = n+1$, potom $A = 4n^2+4n+1$, $B = 4n^2+4n+4 = A+3$. Číslo A delí B práve vtedy, keď $4n^2 + 4n + 1$ delí 3. Avšak pre kladné celé čísla n platí $4n^2 + 4n + 1 \geqq \geqq 4 + 4 + 1 = 9$, preto v tomto prípade nemá úloha riešenie.
- ▷ $m = n + 2$, potom $A = 4n^2 + 8n + 4$, $B = 4n^2 + 8n + 4$. Vidíme, že $A = B$, teda každá dvojica $(m, n) = (n + 2, n)$ kladných celých čísel je riešením zadanej úlohy.

Záver. Úlohe vyhovuje dvojica $(1, 1)$ a ďalej (vzhľadom na symetriu neznámych m, n) každá z dvojíc $(k + 2, k)$ a $(k, k + 2)$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za odvodenie nerovnosti $(m - n)^2 \leqq 4$. Ďalej dajte 1 bod za nájdenie riešenia $(1, 1)$ (1 bod strhnite za jeho zabudnutie v inak úplnom riešení) a 2 body za nájdenie všetkých zostávajúcich riešení. Za uvedenie všetkých riešení bez akéhokoľvek zdôvodnenia dajte nanajvýš 2 body.

---

4. *Nech* M *je množina šiestich navzájom rôznych kladných celých čísel, ktorých súčet je* 60*. Všetky ich napíšeme na steny kocky, na každú práve jedno z nich. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné tri steny kocky, ktoré majú spoločný vrchol, a každé z čísel na týchto troch stenách zväčšíme o* 1*. Určte počet všetkých takých množín* M*, ktorých čísla možno napísať na steny kocky uvedeným spôsobom tak, že po konečnom počte vhodných krokov budú na všetkých stenách rovnaké čísla.* (Peter Novotný)

Riešenie. Označme steny kocky S_1, S_2, …, S_6 tak, že stena S_1 je oproti stene S_6, stena S_2 oproti S_5 a S_3 oproti S_4. Číslo na stene S_i označme c_i. Zrejme ľubovoľný vrchol kocky patrí vždy práve jednej stene z dvojice protiľahlých stien. To znamená, že sa v každom kroku zväčší o 1 aj hodnota súčtov $c_1 + c_6$, $c_2 + c_5$ a $c_3 + c_4$ čísel na protiľahlých stenách. Ak má teda na konci platiť $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6$, čiže aj

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4, \tag{1}$$

musia byť súčty čísel na protiľahlých stenách kocky rovnaké už na začiatku (a zostanú rovnaké aj po každom kroku).

Ukážeme, že podmienka (1) je zároveň postačujúca. Nech teda čísla na stenách kocky spĺňajú (1). Opíšeme postupnosť krokov, po ktorých budú na všetkých stenách kocky rovnaké čísla. Krok, v ktorom zväčšíme čísla na stenách S_i, S_j, S_m, označme k_{ijm}. Bez ujmy na všeobecnosti nech $c_1 = p$ je najväčšie zo šiestich čísel na kocke. Urobíme $(p - c_2)$-krát krok k_{246} a $(p - c_3)$-krát krok k_{356}. Dosiahneme tak, že na stenách S_1, S_2, S_3 budú rovnaké čísla p. Vďaka podmienke (1) je aj na stenách S_4, S_5, S_6 rovnaké číslo, ktoré označme q. Ak ešte neplatí $p = q$, stačí už len $(p - q)$-krát urobiť krok k_{456} (ak $p > q$), resp. $(q - p)$-krát krok k_{123} (ak $q > p$).

Našou úlohou je teda určiť počet takých množín $\mathsf{M} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ navzájom rôznych prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 60 \quad \text{a} \quad c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4.$$

Odtiaľ vyplýva $3(c_1 + c_6) = 60$, teda

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4 = 20. \tag{2}$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zrejme predpokladať, že $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 <$ $< c_6$, čiže (vzhľadom na rovnosti (2))

$$c_1 < c_2 < c_3 < 10 < c_4 < c_5 < c_6.$$

Pritom ku každej trojici (c_1, c_2, c_3) spĺňajúcej $c_1 < c_2 < c_3 < 10$ zvyšné čísla c_4, c_5, c_6 jednoznačne dopočítame z (2). Počet všetkých vyhovujúcich množín M je teda rovný počtu rôznych trojíc prirodzených čísel (c_1, c_2, c_3), ktoré spĺňajú $c_1 < c_2 < c_3 < 10$, čo je

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za nájdenie a správne zdôvodnenie nutnej podmienky (1); za dôkaz, že (1) je aj postačujúcou podmienkou, dajte 2 body. Ďalšie 2 body dajte za určenie počtu množín M.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.