2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu*

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2}&=z+1,\\ \sqrt{y^2+z^2}&=x+1,\\ \sqrt{z^2+x^2}&=y+1.\end{aligned}$$

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Umocnením a odčítaním prvých dvoch rovností dostaneme $x^2-z^2=$ $=(z+1)^2-(x+1)^2$, čo upravíme na $2(x^2-z^2)+2(x-z)=0$ čiže

$$(x-z)(x+z+1)=0. \tag{1}$$

Analogicky by sme dostali ďalšie dve rovnice, ktoré vzniknú z (1) cyklickou zámenou neznámych $x\to y\to z$. Vzhľadom na túto symetriu (daná sústava se nezmení dokonca pri ľubovoľnej permutácii neznámych) stačí rozobrať len nasledovné dve možnosti:

Ak $x=y=z$, prejde pôvodná sústava na jedinú rovnicu $\sqrt{2x^2}=x+1$, ktorá má dve riešenia $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. Každá z trojíc $\big(1\pm\sqrt{2},1\pm\sqrt{2},1\pm\sqrt{2}\big)$ je zrejme riešením pôvodnej sústavy.

Ak sú niektoré dve z čísel x, y, z rôzne, napríklad $x\neq z$, vyplýva z (1) rovnosť $x+z=-1$. Dosadením $x+1=-z$ do druhej rovnice sústavy dostávame $y=0$ a potom z tretej rovnice máme $x^2+(x+1)^2=1$ čiže $x(x+1)=0$. Posledná rovnica má dve riešenia $x=0$ a $x=-1$, ktorým zodpovedajú $z=-1$ a $z=0$. Ľahko overíme, že obe nájdené trojice $(0,0,-1)$ a $(-1,0,0)$ sú riešeniami danej sústavy, rovnako aj trojica $(0,-1,0)$, ktorú dostaneme ich permutáciou.

Daná sústava má päť riešení:

$$(0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (-1,0,0),\ \big(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\big)\ \text{a}\ \big(1-\sqrt{2},1-\sqrt{2},1-\sqrt{2}\big).$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned}x^2&=y+z+1,\\ y^2&=z+x+1,\\ z^2&=x+y+1.\end{aligned}$$

[$(0,0,-1)$, $(0,-1,0)$, $(-1,0,0)$]

N2. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x-y^2}&=z-1,\\ \sqrt{y-z^2}&=x-1,\\ \sqrt{z-x^2}&=y-1.\end{aligned}$$

[59–A–S–1]

N3. Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

[58–B–I–2]

N4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x + y = 1,$$
$$x - y = a,$$
$$-4ax + 4y = z^2 + 4$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a. [58–B–II–1]

N5. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

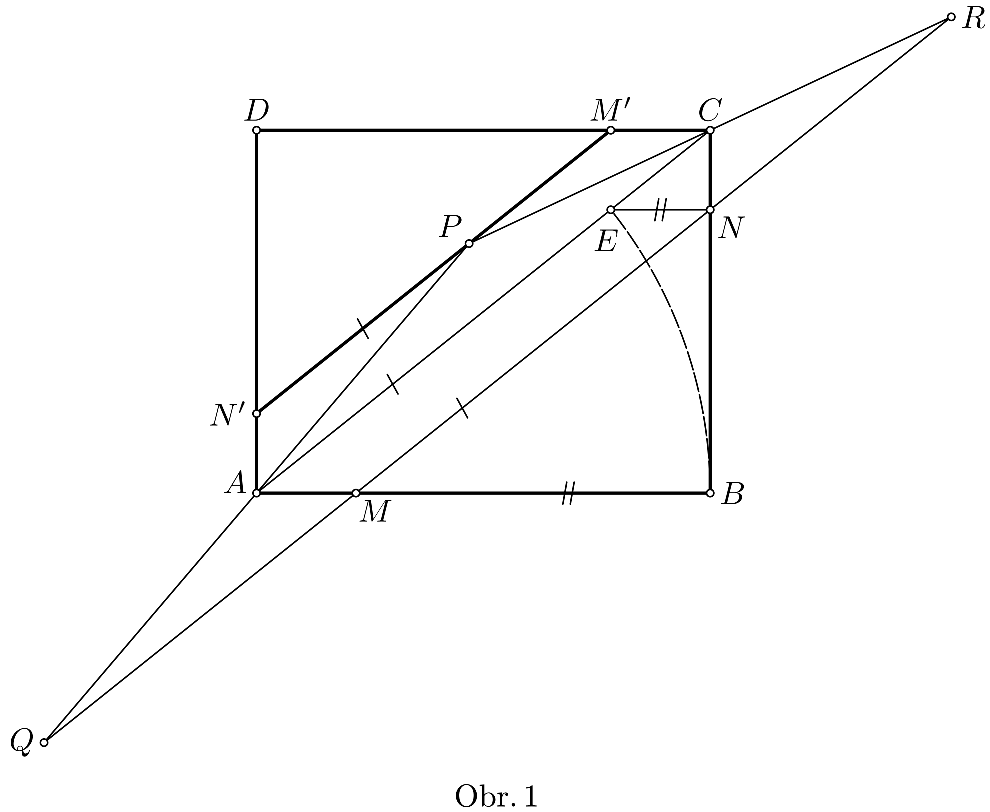
$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2),$$
$$y^2 + 2zx = 6(z + x - 2),$$
$$z^2 + 2xy = 6(x + y - 2).$$

[A–53–S–3]

---

2. *Uvažujme vnútorný bod P daného obdĺžnika $ABCD$ a označme postupne Q, R obrazy bodu P v súmernostiach podľa stredov A, C. Predpokladajme, že priamka QR pretne strany AB a BC vo vnútorných bodoch M a N. Zostrojte množinu všetkých bodov P, pre ktoré platí $|MN| = |AB|$.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Uhlopriečka AC daného obdĺžnika $ABCD$ je podľa zadania strednou priečkou v trojuholníku PQR, a teda $AC \parallel QR$, takže aj $AC \parallel MN$. Úsečka MN je tak jednoznačne určená tým, že je rovnobežná s AC, leží v opačnej polrovine určenej



Obr. 1

priamkou AC ako bod P a pre jej dĺžku platí $|MN| = |AB|$. Konštrukciu bodov M a N je možné urobiť niekoľkými spôsobmi. Dá sa napríklad využiť rovnobežník $AMNE$ (obr. 1), v ktorom platí $|AE| = |MN| = |AB|$.

Keďže úsečka MN súčasne určuje priamku, na ktorej leží strana QR trojuholníka PQR, je zrejmé, že vrchol P musí ležať na priamke p, ktorá je obrazom priamky MN v osovej súmernosti podľa priamky AC (obsahujúcej strednú priečku trojuholníka PQR). Priamka p má s vnútrom daného obdĺžnika spoločné vnútro úsečky $M'N'$ (ktorá je navyše obrazom nájdenej úsečky MN v stredovej súmernosti podľa stredu daného obdĺžnika).

Ľahko vidíme, že aj naopak ku každému vnútornému bodu P úsečky $M'N'$ ležia zodpovedajúce body Q, R na priamke MN a body M, N sú tak priesečníky priamky QR so stranami AB, BC, takže vyhovujú podmienkam úlohy.

Záver. Hľadanou množinou všetkých bodov P danej vlastnosti je vnútro vyššie opísanej úsečky $M'N'$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Je daná kružnica k s priemerom AB. K ľubovoľnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$ zostrojme na polpriamke AY bod X, pre ktorý platí $|AX| = |YB|$. Určte množinu všetkých takých bodov X. [56–B–I–2]

N2. V rovine daného štvorca $KLMN$ určte množinu všetkých bodov P, pre ktoré sú uhly NPK, KPL a LPM zhodné. [53–A–I–2]

N3. Je daný rovnostranný trojuholník MPQ. Nájdite množinu vrcholov C všetkých trojuholníkov ABC takých, že body P, Q sú päty výšok z vrcholov A, B a bod M je stred strany AB. [51–B–I–6]

N4. Sú dané kružnice k a l s rôznymi polomermi, ktoré majú vonkajší dotyk v bode T. Priesečníkom M ich spoločných vonkajších dotyčníc veďme sečnicu s oboch kružníc. Označme X ten z oboch priesečníkov kružnice k so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Podobne označme Y ten z oboch priesečníkov kružnice l so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Nech P je taký bod, že $XTYP$ je rovnobežník. Určte množinu bodov P zodpovedajúcich všetkým takým sečniciam s. [49–B–I–4]

---

3. *Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je* 6. *Dokážte, že aspoň jedno z čísel*

$$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

nie je väčšie ako 8. (*Ján Mazák*)

Riešenie. Stačí ukázať, že súčet troch skúmaných čísel neprevyšuje 24:

$$(ab + bc) + (bc + ca) + (ca + ab) = 2(ab + bc + ca) \leqq \frac{2}{3}(a + b + c)^2 = 24,$$

kde nerovnosť je dôsledkom nerovnosti

$$3(ab + bc + ca) \leqq (a + b + c)^2 = 36,$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leqq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$; tá je splnená pre ľubovoľné tri reálne čísla a, b, c.

Iné riešenie. Vzhľadom na symetriu predpokladajme, že platí $a = \min\{a, b, c\}$. Z rovnosti $a + b + c = 6$ potom vyplýva $a \leqq 2$ a $b + c \geqq 4$. Preto tretie skúmané číslo, rovné $a(b+c)$, má rovnaké znamienko ako číslo a, takže je určite menšie ako 8, ak platí $a \leqq 0$. Ak je naopak $0 < a \leqq 2$, všimnime si, že zo zrejmej nerovnosti $0 \leqq (u - v)^2$, platnej pre ľubovoľné reálne čísla u, v, vyplýva úpravou odhad $4uv \leqq (u + v)^2$; ak sem dosadíme $u = 2a$ a $v = b + c$, dostaneme

$$8a(b + c) \leqq (2a + b + c)^2 = (a + 6)^2 \leqq 8^2 = 64;$$

odtiaľ po vydelení ôsmimi dostaneme nerovnosť $a(b + c) \leqq 8$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$1 \leqq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 9.$$

[55–B–II–4]

N2. Ak reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnostiam

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

tak platí nerovnosť

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$

Dokážte a zistite, kedy pritom nastane rovnosť. [55–C–II–2]

---

4. *Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je zlomok*

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010}$$

rovný celému číslu. (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Zlomok

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010} = n - \frac{2\,010(n-1)}{n^2 + 2\,010}$$

je celé číslo práve vtedy, keď $n^2 + 2\,010$ je deliteľ čísla $2\,010(n - 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67(n - 1)$.

Ak nie je n násobok prvočísla 67, sú čísla $n^2 + 2\,010$ a 67 nesúdeliteľné, preto $n^2 + 2\,010$ musí byť deliteľom čísla $30(n - 1)$. Keďže $|30(n - 1)| < n^2 + 2\,010$, vyhovuje len $n = 1$.

Nech $n = 67m$, kde m je celé. Potom

$$\frac{2\,010(n-1)}{n^2 + 2\,010} = \frac{30(67m - 1)}{67m^2 + 30}.$$

Ak nie je m násobkom piatich, musí byť číslo $67m^2 + 30$ deliteľom čísla $6(67m - 1)$. Pre $|m| \leqq 4$ to tak ale nie je a pre $|m| \geqq 6$ je $|6(67m - 1)| < 67m^2 + 30$. Teda $m = 5k$, kde k je celé. Potom

$$\frac{30(67m - 1)}{67m^2 + 30} = \frac{6(335k - 1)}{335k^2 + 6}.$$

Pre $|k| \geqq 7$ je absolútna hodnota tohto zlomku nenulová a menšia ako 1. Zo zvyšných čísel vyhovujú $k = 0$ a $k = -6$.

Číslo $(n^3 + 2\,010)/(n^2 + 2\,010)$ je teda celé práve vtedy, keď celé n má niektorú z hodnôt 0, 1 alebo $-2\,010$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je podiel $\frac{n^2+15n}{33\,000}$ prirodzené číslo. [56–B–S–3]

N2. Nájdite všetky dvojice (p, q) reálnych čísel také, že mnohočlen $x^2 + pxq$ je deliteľom mnohočlena $x^4 + px^2 + q$. [56–B–I–5]

5. *Zaoberajme sa otázkou, ktoré trojuholníky ABC s ostrými uhlami pri vrcholoch A a B majú nasledujúcu vlastnosť: Ak vedieme stredom výšky z vrcholu C tri priamky rovnobežné so stranami trojuholníka ABC, pretnú ich tieto priamky v šiestich bodoch ležiacich na jednej kružnici.*

a) *Ukážte, že vyhovuje každý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C.*

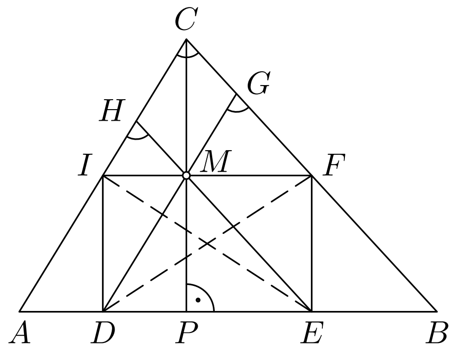
b) *Vysvetlite, prečo žiadny iný trojuholník ABC nevyhovuje.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Hoci odporúčame riešiť obe časti úlohy oddelene (t. j. najprv analyzovať situáciu v pravouhlom trojuholníku), opíšeme priamo ich spoločné riešenie. Celú úlohu môžeme totiž formulovať ako dôkaz tvrdenia, že šesť zostrojených bodov leží na kružnici práve vtedy, keď je uhol ACB pravý.

Uvažujme teda ľubovoľný trojuholník ABC s ostrými uhlami α, β a označme M stred výšky CP a D, E, F, G, H, I uvažované priesečníky tak, aby s vrcholmi A, B, C a pätou výšky P ležali na hranici trojuholníka v poradí

$$A,\ D,\ P,\ E,\ B,\ F,\ G,\ C,\ H,\ I.$$

Z konštrukcie vyplýva, že body M, D, I sú stredy strán pravouhlého trojuholníka ACP a body M, E, F sú stredy strán pravouhlého trojuholníka BCP. Oba štvoruholníky $PMID$ a $PMFE$ sú teda pravouholníky, takže i $DEFI$ je pravouholník (obr. 2). Jeho vrcholy D, E, F, I preto *vždy* ležia na jednej kružnici a úsečky DF a EI sú jej priemery. Našou úlohou je preto zistiť, kedy na tejto kružnici ležia i body G a H. To sa dá podľa Tálesovej vety vyjadriť podmienkou, že uhly DGF a EHI sú pravé. Keďže $DG \parallel AC$ a $EH \parallel BC$, sú oba uhly DGF a EHI zhodné s uhlom ACB a ekvivalencia s podmienkou pravého uhla ACB je tak dokázaná.



Obr. 2

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Označme S stred kružnice vpísanej danému trojuholníku ABC a P, Q päty kolmíc z vrcholu C na priamky, na ktorých ležia osi vnútorných uhlov BAC a ABC. Dokážte, že priamky AB a PQ sú rovnobežné. [51–A–S–2]

N2. Vnútri strán BC, CA, AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC sú postupne vybrané body X, Y a Z. Dokážte, že každému zo štvoruholníkov $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ sa dá opísať kružnica práve vtedy, keď body X, Y, Z sú päty výšok trojuholníka ABC. [51–B–S–2]

6. *Určte počet desaťciferných čísel, v ktorých možno škrtnúť dve susedné cifry a dostať tak číslo 99-krát menšie.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Nech n je číslo vyhovujúce podmienkam zadania. Škrtnutím dvoch posledných cifier zmenšíme n aspoň stokrát, preto sa môžeme obmedziť na škrtanie cifier, ktoré nie sú posledné. Po škrtnutí dvoch susedných cifier ostanú z čísla n dve časti, pritom prvá časť môže byť prázdna, ak sme škrtli jeho prvé dve cifry.

Nech a je číslo určené prvou časťou čísla n (nula v prípade, že prvá časť je prázdna), b je číslo určené vyškrtnutými dvoma ciframi a c je určené poslednou časťou čísla n (počet cifier tejto časti označme k). Podľa zadania platí

$$99(a \cdot 10^k + c) = a \cdot 10^{k+2} + b \cdot 10^k + c,$$

po úprave $98c = 10^k(a+b)$. Keďže $c < 10^k$, musí byť $98 > a+b$. Navyše číslo 49 delí $a+b$, lebo je samo nesúdeliteľné s 10^k. Kladný celočíselný podiel $(a+b)/49$ je menší ako 2, musí teda byť rovný 1, takže $a+b=49$. Odtiaľ vyplýva rovnosť

$$c = \frac{10^k}{2} = 5 \cdot 10^{k-1},$$

kde číslo k je súčasne určené počtom cifier čísla a (ak označíme l počet číslic čísla a, je $k = 10 - l - 2$, pričom v prípade $a = 0$ položíme prirodzene $l = 0$).

Z uvedeného postupu vyplýva, že pre každé $a \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$ a $b = 49 - a$ existuje práve jedno číslo c, pre ktoré opísané číslo n vyhovuje podmienkam zadania, a že iné vyhovujúce n neexistujú. Ukážeme, že všetkých 50 takých n (končiacich siedmimi, šiestimi alebo piatimi nulami) je navzájom rôznych.

Zostrojené n končiace siedmimi nulami je jediné ($a = 0$). Šiestimi nulami končí 9 zostrojených čísel ($a \in \{1, 2, \dots, 9\}$) a sú navzájom rôzne, lebo začínajú rôznymi ciframi. Piatimi nulami končí 40 zostrojených čísel ($a \in \{10, 11, \dots, 49\}$) a sú navzájom rôzne, lebo začínajú rôznymi dvojčísliami.

Pre názornosť vypíšme ešte niekoľko čísel vyhovujúcich zadaniu tak, ako ich dostaneme pomocou našich úvah: pre $a = 0$ máme $b = 49$, $c = 50\,000\,000$ a $n = 4\,950\,000\,000$, pre $a = 1$ je $b = 48$, $c = 5\,000\,000$ a $n = 1\,485\,000\,000$, pre $a = 2$ je $n = 2\,475\,000\,000, \dots,$ pre $a = 9$ je $n = 9\,405\,000\,000$, pre $a = 10$ je $b = 39$, $c = 500\,000$ a $n = 1\,039\,500\,000, \dots,$ pre $a = 49$ je $b = 0$, $c = 500\,000$ a $n = 4\,900\,500\,000$.

Záver. Existuje 50 čísel, ktoré vyhovujú zadaniu.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ukážte, že škrtnutím posledných dvoch číslic aspoň trojciferného čísla dostaneme číslo minimálne stokrát menšie ako pôvodné číslo.

N2. Prirodzené číslo nazveme *vlnitým*, ak pre každé tri po sebe idúce číslice a, b, c jeho dekadického zápisu platí $(a-b)(b-c) < 0$. Dokážte, že z číslic 0, 1, …, 9 je možné zostaviť viac ako 25 000 desaťciferných vlnitých čísel, ktoré obsahujú všetky číslice od nuly po deviatku (číslica 0 nemôže byť na prvom mieste). [56–B–II–3]

N3. Určte najväčšie dvojciferné číslo k s nasledovnou vlastnosťou: existuje prirodzené číslo N, z ktorého po škrtnutí prvej číslice zľava dostaneme číslo k-krát menšie. (Po vyškrtnutí číslice môže zápis čísla začínať jednou alebo niekoľkými nulami.) K určenému číslu k potom nájdite najmenšie vyhovujúce číslo N. [56–C–II–4]

N4. Určte počet všetkých trojíc dvojciferných prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Trojice líšiace sa iba poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich len raz. [54–C–I–5]