2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

1. *V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu*

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=p$$

s neznámou x a reálnym parametrom p. (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Aby bola ľavá strana rovnice definovaná, musia byť oba výrazy pod odmocninami nezáporné, čo je splnené práve pre všetky $x \geqq 0$. Pre nezáporné x potom $p=\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \geqq \sqrt{3}$, rovnica môže teda mať riešenie iba pre $p \geqq \sqrt{3}$.

Upravujme danú rovnicu:

$$\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{x+3} &= p,\\ 2x+3+2\sqrt{x(x+3)} &= p^2,\\ 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2-2x-3,\\ 4x(x+3) &= (p^2-2x-3)^2,\\ 4x^2+12x &= p^4+4x^2+9-4p^2x-6p^2+12x,\\ x &= \frac{(p^2-3)^2}{4p^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Keďže sme danú rovnicu umocňovali na druhú, je nutné sa presvedčiť skúškou, že vypočítané x je pre hodnotu parametra $p \geqq \sqrt{3}$ riešením pôvodnej rovnice:

$$\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}+3}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}}=\sqrt{\frac{p^4-6p^2+9+12p^2}{4p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{4p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}}=\frac{p^2+3}{2p}+\frac{p^2-3}{2p}=p.$$

Pri predposlednej úprave sme využili podmienku $p \geqq \sqrt{3}$ (a teda aj $p^2-3 \geqq 0$ a $p>0$), takže $\sqrt{(p^2-3)^2}=p^2-3$ a $\sqrt{4p^2}=2p$.

Poznámka. Namiesto skúšky stačí overiť, že pre nájdené x sú všetky umocňované výrazy nezáporné, teda vlastne stačí overiť, že

$$p^2-2x-3=\frac{(p^2-3)(p^2+3)}{2p^2} \geqq 0.$$

Pre $p \geqq \sqrt{3}$ to tak naozaj je.

Vynechať skúšku možno aj takouto úvahou: Funkcia $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$ je zrejme rastúca, v bode 0 (ktorý je krajným bodom jej definičného oboru) nadobúda hodnotu $\sqrt{3}$ a zhora je neohraničená. Preto každú hodnotu $p \geqq \sqrt{3}$ nadobúda pre práve jedno $x \geqq 0$. Z toho vyplýva, že pre $p \geqq \sqrt{3}$ má zadaná rovnica práve jedno riešenie, a teda (jediné) nájdené riešenie (1) musí vyhovovať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za zabudnutie skúšky (resp. vynechanie zdôvodnenia, prečo ju robiť netreba) strhnite jeden bod. Pri neuvedení podmienky $p \geqq \sqrt{3}$ dajte 3 body (či už skúška je, alebo nie – ak je, tak je chybne).

2. *Pozdĺž kružnice je rozmiestnených 16 reálnych čísel so súčtom* 7.

a) Dokážte, že existuje úsek piatich susedných čísel so súčtom aspoň 2.

b) Určte najmenšie k také, že v opísanej situácii možno vždy nájsť úsek k susedných čísel so súčtom aspoň 3.

(*Ján Mazák*)

Riešenie. a) Medzi 16 číslami napísanými pozdĺž kružnice sa nachádza práve 16 úsekov piatich susedných čísel (ak vyberieme ľubovoľne jedno z napísaných čísel a od neho označíme čísla pozdĺž kružnice postupne ako prvé, druhé, ..., šestnáste, bude prvý úsek tvorený prvým až piatym číslom, druhý úsek druhým až šiestym číslom, ... a posledný šestnásty úsek bude tvorený šestnástym, prvým, druhým, tretím a štvrtým číslom).

Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že uvažované tvrdenie neplatí, teda že čísla v každom z 16 úsekov majú súčet menší ako 2. Celkový súčet S_5 všetkých 16 súčtov čísel v jednotlivých päticiach je tak menší ako $16 \cdot 2 = 32$. Avšak každé číslo na kružnici je súčasťou práve piatich úsekov piatich susedných čísel, teda každé z 16 čísel je v uvedenom súčte započítané práve päťkrát. Preto je súčet S_5 zároveň rovný päťnásobku súčtu všetkých čísel na kružnici, čo je 35. To je v spore s odvodenou nerovnosťou $S_5 < 32$. Na kružnici teda musí existovať päť po sebe idúcich čísel, ktorých súčet je aspoň 2 (dokonca viac ako 2).

b) Najskôr ukážeme, že neplatí $k \leqq 6$. Na to stačí pozdĺž kružnice rozmiestniť 16 zhodných čísel so súčtom 7. Súčet čísel v ľubovoľnom úseku k čísel tak bude

$$k \cdot \frac{7}{16} \leqq \frac{42}{16} < 3.$$

Nech teraz $k = 7$. Zopakovaním úvahy z časti a) dokážeme, že vhodný úsek už existuje: Predpokladajme naopak, že súčet ľubovoľných siedmich po sebe idúcich čísel (z daných šestnástich) je menší ako tri. Takých úsekov je pozdĺž kružnice šestnásť (ich počet od čísla k nezávisí!), takže súčet S_7 všetkých 16 súčtov čísel v jednotlivých sedmiciach je menší ako $16 \cdot 3 = 48$. Každé z daných 16 čísel je v súčte S_7 započítané sedemkrát, teda $S_7 = 7 \cdot 7 = 49$, čo odporuje predošlému odhadu $S_7 < 48$.

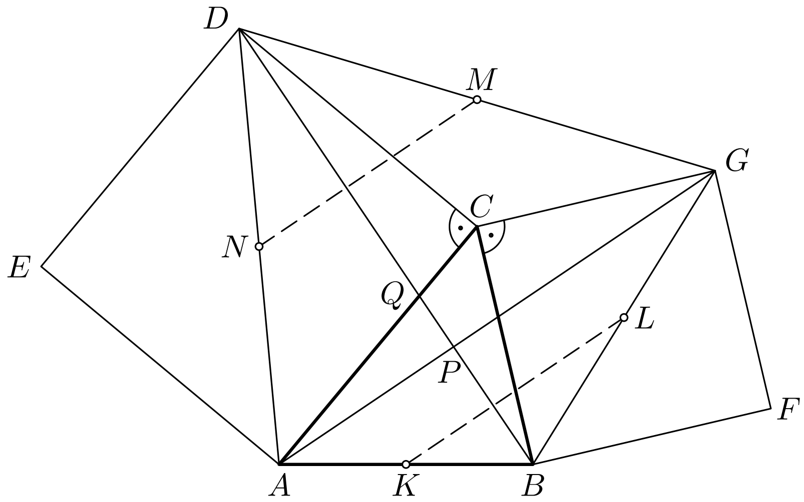
Hľadaným číslom k je číslo 7.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz každej z častí a) a b) dajte po 3 bodoch. Ak v časti b) chýba príklad, že $k \leqq 6$ nevyhovuje, strhnite 2 body.

3. *Zvonka daného trojuholníka ABC sú zostrojené štvorce $ACDE$, $BCGF$. Dokážte, že $|AG| = |BD|$. Ďalej ukážte, že stredy oboch štvorcov spolu so stredmi úsečiek AB a DG sú vrcholmi štvorca.* (*Pavel Leischner*)

Riešenie. Keďže oba uhly BCG a DAC sú pravé, uvažujme otočenie okolo vrcholu C daného trojuholníka, v ktorom sa bod B zobrazí na bod G. V ňom je zrejme obrazom bodu D bod A a obrazom úsečky BD úsečka GA (obr. 1). Odtiaľ vyplýva, že $|AG| =$

$= |BD|$, a tiež, že úsečky AG a BD sú navzájom kolmé.



Obr. 1

Označme postupne K, L, M, N stredy strán štvoruholníka $ABGD$. (Body N a L sú teda stredmi uvažovaných štvorcov.) Vzhľadom na to, že úsečka KL je strednou priečkou trojuholníka AGB a úsečka MN strednou priečkou trojuholníka AGD, máme $|KL| = \frac{1}{2}|AG| = |KL|$ a zároveň $MN \parallel AG \parallel KL$. Podobne $|KN| = \frac{1}{2}|BD| = |LM|$ a zároveň $KN \parallel BD \parallel LM$. To znamená, že $KLMN$ je rovnobežník. Keďže však vieme, že $|AG| = |BD|$ a navyše $AG \perp BD$, je $KLMN$ štvorec. Tým sú všetky tvrdenia úlohy dokázané.

Iné riešenie. Úlohu vyriešime bez úvahy o otočení. Pre dôkaz rovnosti $|AG| = |BD|$ ukážeme, že trojuholníky ACG a DCB sú zhodné podľa vety *sus*. Naozaj, $|AC| = |DC|$, $|CG| = |CB|$ a $|\measuredangle ACG| = |\measuredangle ACB| + |\measuredangle BCG| = |\measuredangle ACB| + 90^\circ = |\measuredangle ACB| + |\measuredangle ACD| = |\measuredangle DCB|$.

Úsečky AG a BD ako strany zhodných trojuholníkov teda majú rovnakú dĺžku. Aby sme overili, že sú navyše navzájom kolmé, označíme P ich priesečník a porovnáme vnútorné uhly v trojuholníkoch APQ a DCQ, pričom Q je priesečník úsečiek AC a BD. Pri vrcholoch A a D sú uhly zhodné vďaka overenej zhodnosti trojuholníkov ACG a DCB, uhly pri vrchole Q sa tiež zhodujú (sú vrcholové), takže sa zhodujú aj ich uhly pri vrcholoch P a C, sú teda oba pravé.

Z dokázanej zhodnosti aj kolmosti úsečiek AG a BD odvodíme, že $KLMN$ je štvorec, rovnako ako v prvom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz zhodnosti úsečiek AG a BD dajte 2 body, za dôkaz ich kolmosti ďalšie 2 body. Za dokončenie dôkazu tiež 2 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.